КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

УДК 517.977

Наконечный Александр Григорьевич
Подлипенко Юрий Константинович

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Киев – 2002

СОДЕРЖАНИЕ

Рассматриваются задачи минимаксного оценивания решений двухточечных краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Доказаны утверждения об общем виде минимаксных оценок решений при линейных наблюдениях на некотором промежутке и найдены погрешности оценивания.

Для частного случая краевых задач и краевых условий с использованием метода прогонки показано, что уравнения для минимаксных оценок могут быть упрощены.

1 Краевая задача для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} + A\varphi(t) = f(t), \quad t \in (0, T), \tag{1.1}$$

относительно вектор-функции $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t) \ldots, \varphi_n(t))^T$, где $A = A(t)$ – матрица размерности $n \times n$ с непрерывными на отрезке $[0, T]$ элементами $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t) \ldots f_n(t))^T$ – заданная вектор-функция с непрерывными на отрезке $[0, T]$ компонентами, $\frac{d\varphi(t)}{dt} = (\frac{d\varphi_1(t)}{dt}, \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \ldots, \frac{d\varphi_n(t)}{dt})^T$, а знак T означает транспонирование. Пусть $B_0 = \{b_{rs}^{(0)}\}$, $r = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, n}$ и $B_1 = \{b_{rs}^{(1)}\}$, $r = \overline{1, n-m}$, $s = \overline{1, n}$ – некоторые матрицы размерности $m \times n$ и $(n-m) \times n$ ранга m и $n-m$ соответственно, а $f_0 = (f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \ldots, f_m^{(0)})^T \in \mathbb{R}^m$ и $f_1 = (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_{n-m}^{(1)})^T \in \mathbb{R}^{n-m}$ – некоторые заданные векторы.

Задачу нахождения решения $\varphi(t)$ системы уравнений (1.1), удовлетворяющего на концах отрезка 0 и T условиям

$$B_0\varphi(0) = f_0, \quad B_1\varphi(T) = f_1, \tag{1.2}$$

будем называть краевой задачей для системы уравнений (1.1).

Задачу определения функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей на интервале $(0, T)$ уравнению

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} + A\varphi(t) = 0, \tag{1.3}$$

и граничным условиям

$$B_0\varphi(0) = 0, \quad B_1\varphi(T) = 0 \tag{1.4}$$

будем называть однородной краевой задачей, соответствующей краевой задаче (1.1), (1.2).

Решение $\varphi(t) \equiv 0$ однородной краевой задачи (1.3), (1.4) называется тривиальным решением.

Краевую задачу (1.1), (1.2) можно записать в скалярной форме:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1'(t) + a_{11}\varphi_1(t) + a_{12}\varphi_2(t) + \cdots + a_{1n}\varphi_n(t) & = & f_1(t), \\ \varphi_2'(t) + a_{21}\varphi_1(t) + a_{22}\varphi_2(t) + \cdots + a_{2n}\varphi_n(t) & = & f_1(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots, \\ \varphi_n'(t) + a_{n1}\varphi_1(t) + a_{n2}\varphi_2(t) + \cdots + a_{nn}\varphi_n(t) & = & f_n(t), \end{array} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered} U_i(\varphi) := \sum_{q=1}^{n} b_{iq}^{(0)}\varphi_q(0) = f_i^{(0)}, \quad i = \overline{1,m}, \\ U_{m+i}(\varphi) := \sum_{q=1}^{n} b_{iq}^{(1)}\varphi_q(T) = f_i^{(1)}, \quad i = \overline{1,n-m}. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Пусть

$$\varphi^{(i)}(t) = (\varphi_1^{(i)}(t), \varphi_2^{(i)}(t) \ldots, \varphi_n^{(i)}(t))^T, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.7}$$

– фундаментальная система решений системы уравнений (1.3) (см., напр., [8] с.179). Тогда решения системы (1.3), (1.4) имеют вид

$$\varphi(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) + \cdots + c_n\varphi^{(n)}(t),$$

где, в силу (1.4), постоянные c_1, $c_2, \ldots, c_n$ должны быть такими, что

$$\begin{array}{rcl} c_1U_1(\varphi^{(1)}) + c_2U_1(\varphi^{(2)}) + \cdots + c_nU_1(\varphi^{(n)}) & = & 0, \\ c_1U_2(\varphi^{(1)}) + c_2U_2(\varphi^{(2)}) + \cdots + c_nU_2(\varphi^{(n)}) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & .., \\ c_1U_n(\varphi^{(1)}) + c_2U_n(\varphi^{(2)}) + \cdots + c_nU_n(\varphi^{(n)}) & = & 0. \end{array} \tag{1.8}$$

Отсюда следует, что если ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} U_1(\varphi^{(1)}) & U_1(\varphi^{(2)}) & \cdots & U_1(\varphi^{(n)}) \\ U_2(\varphi^{(1)}) & U_2(\varphi^{(2)}) & \cdots & U_2(\varphi^{(n)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(\varphi^{(1)}) & U_n(\varphi^{(2)}) & \cdots & U_n(\varphi^{(n)}) \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

равен n, то однородная краевая задача имеет только тривиальное решение; справедливо и обратное: если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то ранг матрицы (1.9) равен n. В самом деле, если допустить, что ранг этой матрицы равен $r < n$, то тогда система (1.8) будет иметь $n-r$ линейно независимых решений $c^{(i)} = (c_1^{(i)}, \ldots, c_n^{(i)})^T$, $i = \overline{1, n-r}$ (см., напр., [7] с.85). Покажем, что тогда функции

$$\tilde{\varphi}^{(i)}(x) = c_1^{(i)}\varphi^{(1)}(x) + \cdots + c_n^{(i)}\varphi^{(n)}(x) \quad i = \overline{1, n-r}, \tag{1.10}$$

удовлетворяющие условиям (1.3), (1.4) будут линейно независимыми, т.е. покажем, что равенство

$$\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i\tilde{\varphi}^{(i)}(x) = 0 \tag{1.11}$$

может выполняться только при $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n-r}$. Подставляя (1.10) в (1.11), получим

$$\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i \sum_{k=1}^{n} c_k^{(i)} \varphi^{(k)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{(k)}(x) \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i c_k^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi^{(k)}(x) = 0,$$

где $\beta_k = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i c_k^{(i)}$. Но вектор-функции $\varphi^{(k)}(x)$, $k = \overline{1, n}$, линейно независимы, поэтому $\beta_k = 0$, $k = \overline{1, n}$, или $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i c_k^{(i)} = 0$, $k = \overline{1, n}$. Но тогда все $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n-r}$, т.к. векторы $c^{(i)} = (c_1^{(i)}, \ldots, c_n^{(i)})^T$, $i = \overline{1, n-r}$, линейно независимы. Но линейная независимость системы функций (1.10), удовлетворяющих (1.3), (1.4), противоречит нашему предположению о том , что краевая задача (1.3), (1.4) имеет лишь тривиальное решение. Полученное противоречие означает, что ранг матрицы (1.9) равен n.

Будем далее предполагать, что однородная краевая задача (1.3), (1.4), соответствующая краевой задаче (1.1), (1.2), имеет только тривиальное решение. Покажем, что тогда исходная краевая задача (1.1), (1.2), имеет единственное решение при любых правых частях $f(t) = (f_1(t), f_2(t) \ldots f_n(t))^T$, $f_0 = (f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \ldots, f_m^{(0)})^T \in \mathbb{R}^m$ и $f_1 = (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_{n-m}^{(1)})^T \in \mathbb{R}^{n-m}$.

В самом деле, пусть система (1.7) – фундаментальная система решений однородной системы уравнений (1.3), а $\varphi^{(0)}(t) = (\varphi_1^{(0)}(t), \varphi_2^{(0)}(t) \ldots, \varphi_n^{(0)}(t))^T$ - частное решение системы (1.1). Тогда общее решение системы (1.1), или эквивалентной ей системы (1.5), имеет вид

$$\varphi(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) + \cdots + c_n\varphi^{(n)}(t) + \varphi^{(0)}(t),$$

где $c_i = \mathrm{const}$. Это решение удовлетворяет условиям (1.2), или эквивалентным им условиям (1.6), если коэффициенты c_i, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{array}{rcl}
c_1U_1(\varphi^{(1)}) + c_2U_1(\varphi^{(2)}) + \cdots + c_nU_1(\varphi^{(n)}) & = & f_1^{(0)} - U_1(\varphi^{(0)}), \\
c_1U_2(\varphi^{(1)}) + c_2U_2(\varphi^{(2)}) + \cdots + c_nU_2(\varphi^{(n)}) & = & f_2^{(0)} - U_2(\varphi^{(0)}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots, \\
c_1U_m(\varphi^{(1)}) + c_2U_m(\varphi^{(2)}) + \cdots + c_nU_m(\varphi^{(n)}) & = & f_m^{(0)} - U_m(\varphi^{(0)}), \\
c_1U_{m+1}(\varphi^{(1)}) + c_2U_{m+1}(\varphi^{(2)}) + \cdots + c_nU_{m+1}(\varphi^{(n)}) & = & f_1^{(1)} - U_{m+1}(\varphi^{(0)}), \\
c_1U_{m+2}(\varphi^{(1)}) + c_2U_{m+2}(\varphi^{(2)}) + \cdots + c_nU_{m+2}(\varphi^{(n)}) & = & f_2^{(1)} - U_{m+2}(\varphi^{(0)}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots, \\
c_1U_n(\varphi^{(1)}) + c_2U_n(\varphi^{(2)}) + \cdots + c_nU_n(\varphi^{(n)}) & = & f_{n-m}^{(1)} - U_n(\varphi^{(0)}).
\end{array} \tag{1.12}$$

Но ранг матрицы (1.9) этой системы равен n, поскольку однородная краевая задача (1.3), (1.4) имеет только тривиальное решение. Поэтому система (1.12), а вместе с ней и краевая задача (1.1), (1.2), имеет единственное решение. Таким образом доказана следующая

Теорема 1. *Для того, чтобы неоднородная краевая задача (1.1), (1.2) имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ей однородная краевая задача (1.3), (1.4) имела лишь тривиальное решение.*

2 Сопряженная краевая задача

Далее введем понятие краевой задачи, сопряженной к краевой задаче (1.1), (1.2). С этой целью введем следующие обозначения. Обозначим через E_k – единичную матрицу размерности $k \times k$; через $O_{k,r}$ – нулевую матрицу размерности $k \times r$; $B_{01} = \{b^{(0)}_{ri_k}\}$, $r = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,m}$, - квадратную невырожденную подматрицу размерности $m \times m$ матрицы $B_0 = \{b^{(0)}_{rs}\}$, $r = \overline{1,m}$, $s = \overline{1,n}$; через $B_{02} = \{b^{(0)}_{rj_l}\}$, $r = \overline{1,m}$, $l = \overline{1,n-m}$, - подматрицу размерности $m \times (n-m)$ матрицы B_0, полученную в результате удаления из последней всех столбцов матрицы B_{01} (так что $\{j_1, \dots, j_{n-m}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\}$); через $\hat{B}_0 = (-B^T_{02}(B^T_{01})^{-1}, E_{n-m})$ – матрицу размерности $(n-m) \times n$, i_k-й столбец которой равен $k-$му столбцу матрицы $-B^T_{02}(B^T_{01})^{-1}$ (ее размерность равна $(n-m) \times m$), $k = \overline{1,m}$, а j_l-й столбец равен $l-$му столбцу матрицы E_{n-m}, $l = \overline{1,n-m}$; через $\bar{B}_0 = ((B^T_{01})^{-1}, O_{m,n-m})$ – матрицу размерности $m \times n$, i_k-й столбец которой равен $k-$му столбцу матрицы $(B^T_{01})^{-1}$, $k = \overline{1,m}$, а j_l-й столбец равен $l-$му столбцу матрицы $O_{m,n-m}$, $l = \overline{1,n-m}$; через $\tilde{B}_0 = (O_{n-m,m}, E_{n-m})$ – матрицу размерности $(n-m) \times n$, i_k-й столбец которой равен $k-$му столбцу матрицы $O_{n-m,m}$, $k = \overline{1,m}$, а j_l-й столбец равен $l-$му столбцу матрицы E_{n-m}, $l = \overline{1,n-m}$.

Обозначим аналогично через $B_{11} = \{b^{(1)}_{ri'_k}\}$, $r = \overline{1,n-m}$, $k = \overline{1,n-m}$, - квадратную невырожденную подматрицу размерности $(n-m)\times(n-m)$ матрицы $B_1 = \{b^{(1)}_{rs}\}$, $r = \overline{1,n-m}$, $s = \overline{1,n}$; через $B_{12} = \{b^{(1)}_{rj'_l}\}$, $r = \overline{1,n-m}$, $l = \overline{1,m}$, - подматрицу размерности $(n-m)\times m$ матрицы B_1, полученную в результате удаления из последней всех столбцов матрицы B_{11} (так что $\{j'_1, \dots, j'_m\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i'_1, \dots, i'_{n-m}\}$); через $\hat{B}_1 = (-B^T_{12}(B^T_{11})^{-1}, E_m)$ – матрицу размерности $m \times n$, i'_k-й столбец которой равен $k-$му столбцу матрицы $-B^T_{12}(B^T_{11})^{-1}$ (ее размерность равна $m \times (n-m)$), $k = \overline{1,n-m}$, а j'_l-й столбец равен $l-$му столбцу матрицы E_m, $l = \overline{1,m}$; через $\bar{B}_1 = ((B^T_{11})^{-1}, O_{n-m,m})$ – матрицу размерности $(n-m) \times n$, i'_k-й столбец которой равен $k-$му столбцу матрицы $(B^T_{11})^{-1}$, $k = \overline{1,n-m}$, а j'_l-й столбец равен $l-$му столбцу матрицы $O_{n-m,m}$, $l = \overline{1,m}$; через $\tilde{B}_1 = (O_{m,n-m}, E_m)$ – матрицу размерности $m \times n$, i'_k-й столбец которой равен $k-$му столбцу матрицы $O_{m,n-m}$, $k = \overline{1,n-m}$, а j'_l-й столбец равен $l-$му столбцу матрицы E_m, $l = \overline{1,m}$. Далее через $(u,v)_N$ будем обозначать скалярное произведение векторов $u = (u_1, \dots, u_N)^T$ и $v = (v_1, \dots, v_N)^T$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$:

$$(u,v)_N = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i.$$

Положим
$$L = \frac{d}{dt} + A,$$
тогда
$$L\varphi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} + A\varphi(t).$$
Умножим скалярно обе части этого равенства на вектор-функцию $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))^T$ и результат проинтегрируем в пределах от 0 до T. Тогда получим
$$\int_0^T (L\varphi(t), \psi(t))_n dt = \int_0^T \left(\frac{d\varphi(t)}{dt} + A\varphi(t), \psi(t) \right)_n dt$$
$$= \int_0^T \left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \psi(t) \right)_n dt + \int_0^T (A\varphi(t), \psi(t))_n \, dt$$
$$= \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{d\varphi_i(t)}{dt} \psi_i(t) dt + \int_0^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\varphi_j(t)\psi_i(t) dt$$
$$= \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\psi_i(t) \,\Big|_0^T - \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{d\psi_i(t)}{dt}\varphi_i(t)dt + \int_0^T \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\psi_i(t)\varphi_j(t) \right) dt$$
$$= (\varphi(T), \psi(T))_n - (\varphi(0), \psi(0))_n - \int_0^T \left(\frac{d\psi(t)}{dt}, \varphi(t) \right)_n dt + \int_0^T \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\psi_j(t)\varphi_i(t) \right) dt$$
$$= (\varphi(T), \psi(T))_n - (\varphi(0), \psi(0))_n + \int_0^T \left(-\frac{d\psi(t)}{dt}, \varphi(t) \right)_n dt + \int_0^T \left(\varphi(t), A^T\psi(t) \right)_n dt$$
$$= (\varphi(T), \psi(T))_n - (\varphi(0), \psi(0))_n + \int_0^T \left(\varphi(t), L^*\psi(t) \right)_n, \tag{2.1}$$
где через L^* обозначен дифференциальный оператор вида
$$L^* = -\frac{d}{dt} + A^T,$$
который мы будем называть формально сопряженным к оператору L. Покажем теперь, что внеинтегральные члены в формуле (2.1) можно представить в виде
$$(\psi(T), \varphi(T))_n - (\psi(0), \varphi(0))_n = (\bar{B}_1\psi(T), B_1\varphi(T))_{n-m} + (\hat{B}_1\psi(T), \tilde{B}_1\varphi(T))_m$$
$$-(\bar{B}_0\psi(0), B_0\varphi(0))_m - (\hat{B}_0\psi(0), \tilde{B}_0\varphi(0))_{n-m}. \tag{2.2}$$
Для этого заметим, что
$$B_0\varphi(0) = \begin{pmatrix} \sum_{q=1}^n b_{1q}^{(0)}\varphi_q(0) \\ \vdots \\ \sum_{q=1}^n b_{nq}^{(0)}\varphi_q(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n b_{1i_k}^{(0)}\varphi_{i_k}(0) + \sum_{l=1}^{n-m} b_{1j_l}^{(0)}\varphi_{j_l}(0) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n b_{mi_k}^{(0)}\varphi_{i_k}(0) + \sum_{l=1}^{n-m} b_{mj_l}^{(0)}\varphi_{j_l}(0) \end{pmatrix}$$

$$= B_{01}\varphi_1^{(0)}(0) + B_{02}\varphi_2^{(0)}(0),$$

где

$$\varphi_1^{(0)}(0) := \begin{pmatrix} \varphi_{i_1}(0) \\ \vdots \\ \varphi_{i_m}(0) \end{pmatrix}, \quad \varphi_2^{(0)}(0) := \begin{pmatrix} \varphi_{j_1}(0) \\ \vdots \\ \varphi_{j_{n-m}}(0) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\varphi_1^{(0)}(0) = B_{01}^{-1}B_0\varphi(0) - B_{01}^{-1}B_{02}\varphi_2^{(0)}(0)$, и

$$(\psi(0), \varphi(0))_n = (\psi_1^{(0)}(0), \varphi_1^{(0)}(0))_m + (\psi_2^{(0)}(0), \varphi_2^{(0)}(0))_{n-m}$$

$$= (\psi_1^{(0)}(0), B_{01}^{-1}B_0\varphi(0))_m - (\psi_1^{(0)}(0), B_{01}^{-1}B_{02}\varphi_2^{(0)}(0))_m + (\psi_2^{(0)}(0), \varphi_2^{(0)}(0))_{n-m}$$

$$= (\bar{B}_0\psi(0), B_0\varphi(0))_m - (B_{02}^T(B_{01}^T)^{-1}\psi_1^{(0)}(0), \varphi_2^{(0)}(0))_{n-m} + (\psi_2^{(0)}(0), \varphi_2^{(0)}(0))_{n-m}$$

$$= (\bar{B}_0\psi(0), B_0\varphi(0))_m + ((-B_{02}^T(B_{01}^T)^{-1}, 0)\psi(0), \varphi_2^{(0)}(0))_{n-m}$$

$$+\big((0, E_{n-m})\psi(0), \varphi_2^{(0)}(0)\big)_{n-m},$$

где $\psi_1^{(0)}(0)$ и $\psi_2^{(0)}(0)$ – векторы, состоящие из компонент вектора $\psi(0)$, с номерами, равными номерам компонент векторов $\varphi_1^{(0)}(0)$ и $\varphi_2^{(0)}(0)$ соответственно. Принимая во внимание, что

$$(-B_{02}^T(B_{01}^T)^{-1}, O_{n-m,n-m}) + (O_{n-m,m}, E_{n-m}) = (-B_{02}^T(B_{01}^T)^{-1}, E_{n-m}) = \hat{B}_0,$$

отсюда находим

$$(\psi(0), \varphi(0))_n = (\bar{B}_0\psi(0), B_0\varphi(0))_m + (\hat{B}_0\psi(0), \tilde{B}_0\varphi(0))_{n-m}.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$(\psi(T), \varphi(T))_n = (\bar{B}_1\psi(T), B_1\varphi(T))_{n-m} + (\hat{B}_1\psi(T), \tilde{B}_1\varphi(T))_m.$$

Из двух последних равенств следует представление (2.2), откуда и из (2.1) получаем

$$\int_0^T (L\varphi(t), \psi(t))_n dt = (\bar{B}_1\psi(T), B_1\varphi(T))_{n-m} + (\hat{B}_1\psi(T), \tilde{B}_1\varphi(T))_m$$

$$-(\bar{B}_0\psi(0), B_0\varphi(0))_m - (\hat{B}_0\psi(0), \tilde{B}_0\varphi(0))_{n-m} + \int_0^T (\varphi(t), L^*\psi(t))_n\,. \qquad (2.3)$$

Запишем теперь сумму первых четырех слагаемых в правой части равенства (2.3) в скалярной форме. Для этого введем следующие обозначения.

$$\begin{pmatrix} U_{n+1}(\varphi) \\ \vdots \\ U_{2n-m}(\varphi) \end{pmatrix} := \tilde{B}_0\varphi(0) = \begin{pmatrix} \sum_{q=1}^n \tilde{b}_{1q}^{(0)}\varphi_q(0) \\ \vdots \\ \sum_{q=1}^n \tilde{b}_{n-m,q}^{(0)}\varphi_q(0) \end{pmatrix}, \qquad (2.4)$$

$$\begin{pmatrix} U_{2n-m+1}(\varphi) \\ \vdots \\ U_{2n}(\varphi) \end{pmatrix} := \tilde{B}_1\varphi(T) = \begin{pmatrix} \sum_{q=1}^{n} \tilde{b}_{1q}^{(1)}\varphi_q(T) \\ \vdots \\ \sum_{q=1}^{n} \tilde{b}_{m,q}^{(1)}\varphi_q(T) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\begin{pmatrix} V_{2n}(\psi) \\ \vdots \\ V_{2n-m+1}(\psi) \end{pmatrix} := \bar{B}_0\psi(0) = \begin{pmatrix} \sum_{q=1}^{n} \bar{b}_{1q}^{(0)}\psi_q(0) \\ \vdots \\ \sum_{q=1}^{n} \bar{b}_{m,q}^{(0)}\psi_q(0) \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\begin{pmatrix} V_{2n-m}(\psi) \\ \vdots \\ V_{n+1}(\psi) \end{pmatrix} := \bar{B}_1\psi(T) = \begin{pmatrix} \sum_{q=1}^{n} \bar{b}_{1q}^{(1)}\psi_q(T) \\ \vdots \\ \sum_{q=1}^{n} \bar{b}_{n-m,q}^{(1)}\psi_q(T) \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix} V_{n}(\psi) \\ \vdots \\ V_{m+1}(\psi) \end{pmatrix} := \hat{B}_0\psi(0) = \begin{pmatrix} \sum_{q=1}^{n} \hat{b}_{1q}^{(0)}\psi_q(0) \\ \vdots \\ \sum_{q=1}^{n} \hat{b}_{n-m,q}^{(0)}\psi_q(0) \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

$$\begin{pmatrix} V_{m}(\psi) \\ \vdots \\ V_{1}(\psi) \end{pmatrix} := \hat{B}_1\psi(T) = \begin{pmatrix} \sum_{q=1}^{n} \hat{b}_{1q}^{(1)}\psi_q(T) \\ \vdots \\ \sum_{q=1}^{n} \hat{b}_{m,q}^{(1)}\psi_q(T) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Тогда равенство (2.3) перепишется в виде

$$\begin{gathered} \int_0^T (L\varphi(t), \psi(t))_n dt - \int_0^T (\varphi(t), L^*\psi(t))_n \\ = -U_1(\varphi)V_{2n}(\psi) - U_2(\varphi)V_{2n-1}(\psi) - \cdots - U_m(\varphi)V_{2n-m+1}(\psi) \\ +U_{m+1}(\varphi)V_{2n-m}(\psi) + U_{m+2}(\varphi)V_{2n-m-1}(\psi) + \cdots + U_n(\varphi)V_{n+1}(\psi) \\ -U_{n+1}(\varphi)V_n(\psi) - U_{n+2}(\varphi)V_{n-1}(\psi) - \cdots - U_{2n-m}(\varphi)V_{m+1}(\psi) \end{gathered}$$

$$+U_{2n-m+1}(\varphi)V_m(\psi) + U_{2n-m+2}(\varphi)V_{m-1}(\psi) + \cdots + U_{2n}(\varphi)V_1(\psi). \tag{2.10}$$

Введем теперь понятие сопряженной краевой задачи.

Определение 1. *Однородная краевая задача*

$$L^*\psi(t) = 0, \quad t \in (0, T), \tag{2.11}$$

$$\hat{B}_0\psi(0) = 0, \quad \hat{B}_1\psi(T) = 0, \tag{2.12}$$

называется сопряженной к однородной краевой задаче (1.3), (1.4).

Определение 2. *Неоднородная краевая задача*

$$L^*\psi(t) = \tilde{f}(t), \quad t \in (0,T), \tag{2.13}$$

$$\hat{B}_0\psi(0) = \tilde{f}_0, \quad \hat{B}_1\psi(T) = \tilde{f}_1, \tag{2.14}$$

называется сопряженной к однородной краевой задаче (1.1), (1.2).

Учитывая обозначения (1.6), (2.4) – (2.9), краевую задачу (2.11), (2.12), сопряженную к задаче (1.3), (1.4) можно записать в следующей скалярной форме:

$$\begin{array}{rcl} -\psi_1'(t) + a_{11}\psi_1(t) + a_{21}\psi_2(t) + \cdots + a_{n1}\psi_n(t) & = & 0, \\ -\psi_2'(t) + a_{12}\psi_1(t) + a_{22}\psi_2(t) + \cdots + a_{n2}\psi_n(t) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots, \\ -\psi_n'(t) + a_{1n}\psi_1(t) + a_{2n}\psi_2(t) + \cdots + a_{nn}\psi_n(t) & = & 0, \end{array} \tag{2.15}$$

$$V_i(\psi) := 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.16}$$

Пусть $z^{(1)}(t)$, $z^{(2)}(t)$, ... , $z^{(n)}(t)$ – фундаментальная система решений однородной системы $L^*\psi(t) = 0$. Покажем, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} V_1(z^{(1)}) & V_1(z^{(2)}) & \cdots & V_1(z^{(n)}) \\ V_2(z^{(1)}) & V_2(z^{(2)}) & \cdots & V_2(z^{(n)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_n(z^{(1)}) & V_n(z^{(2)}) & \cdots & V_n(z^{(n)}) \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

равен n. Допустим, что это не так и ранг матрицы (2.17) равен $r < n$. Учитывая, что всякое решение уравнения $L^*\psi(t) = 0$ и, в частности решение однородной краевой (2.15), (2.16) задачи имеет вид

$$\psi(t) = c_1 z^{(1)}(t) + \cdots + c_n z^{(n)}(t),$$

где $c_k = \text{const}$, $k = \overline{1,n}$, и подставляя это выражение в (2.16), получим систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{array}{rcl} V_1(\psi) = c_1 V_1(z^{(1)}) + \cdots + c_n V_1(z^{(n)}) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdot, \\ V_n(\psi) = c_1 V_n(z^{(1)}) + \cdots + c_n V_n(z^{(n)}) & = & 0 \end{array} \tag{2.18}$$

для определения постоянных $c_k = \text{const}$, $k = \overline{1,n}$. Поскольку, по предположению, ранг матрицы этой системы равен r и $r < n$, то система (2.18) имеет $n - r$ линейно независимых решений $c^{(i)} = (c_1^{(i)}, \ldots, c_n^{(i)})^T$, $i = \overline{1, n-r}$ (см. цитированную выше книгу [7], с.85), а тогда функции

$$\psi^{(i)}(t) = c_1^{(i)} z^{(1)}(t) + \cdots + c_n z^{(n)}(t),$$

являющиеся решением однородной сопряженной краевай задачи (2.15), (2.16) будут линейно независимыми (в силу рассуждений, аналогичных содержащимся на стр. 4).

Если теперь $\psi(t)$– любое решение однородной краевой задачи (2.15), (2.16), то при $\varphi(t)=\varphi^{(i)}(t)$, где $\varphi^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,n}$ – фундаментальная система решений однородной системы $L\varphi(t)=0$, интегралы в формуле (2.10) обращаются в нуль. Кроме того, $V_1(\psi)=V_2(\psi)=\ldots=V_n(\psi)=0$. Следовательно, в этом случае, формула (2.10) примет вид

$$\begin{aligned} &U_1(\varphi^{(1)})(-V_{2n}(\psi))+\cdots+U_m(\varphi^{(1)})(-V_{2n-m+1}(\psi))+\\ &\qquad +U_{m+1}(\varphi^{(1)})V_{2n-m}(\psi)+\cdots+U_n(\varphi^{(1)})V_{n+1}(\psi)=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &U_1(\varphi^{(n)})(-V_{2n}(\psi))+\cdots+U_m(\varphi^{(n)})(-V_{2n-m+1}(\psi))+\\ &\qquad +U_{m+1}(\varphi^{(n)})V_{2n-m}(\psi)+\cdots+U_n(\varphi^{(n)})V_{n+1}(\psi)=0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Эта система имеет $n-r$ решений,

$$-V_{2n}(\psi^{(i)}),\ \cdots,\ -V_{2n-m+1}(\psi^{(i)}),\ V_{2n-m}(\psi^{(i)}),\ \cdots,\ V_{n+1}(\psi^{(i)}) \quad (i=1,2,\ldots,n-r), \tag{2.20}$$

которые будут линейно независимыми. В самом деле, если допустить, противное, то тогда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} V_{n+1}(\psi^{(1)}) & \cdots & V_{2n-m}(\psi^{(1)}) & -V_{2n-m+1}(\psi^{(1)}) & \cdots & -V_{2n}(\psi^{(1)}) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ V_{n+1}(\psi^{(n-r)}) & \cdots & V_{2n-m}(\psi^{((n-r))}) & -V_{2n-m+1}(\psi^{((n-r))}) & \cdots & -V_{2n}(\psi^{((n-r))}) \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

меньше $n-r$. Но, поскольку ранг матрицы (2.21) равен максимальному числу линейно независимых строк этой матрицы (см., напр., цитированную выше книгу [7], стр.71), мы могли бы найти такие числа $a_1,\ \ldots\ ,\ a_{n-r}$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$a_1V_i(\psi^{(1)})+a_2V_i(\psi^{(2)})+\cdots+a_{n-r}V_i(\psi^{(n-r)})=0, \quad i=\overline{n+1,2n}$$

или

$$V_i\left(a_1\psi^{(1)}+a_2\psi^{(2)}+\cdots+a_{n-r}\psi^{(n-r)}\right)=0, \quad i=\overline{n+1,2n}.$$

Таким образом, полагая

$$\psi(t)=a_1\psi^{(1)}(t)+a_2\psi^{(2)}(t)+\cdots+a_{n-r}\psi^{(n-r)}(t), \tag{2.22}$$

имеем

$$V_i(\psi)=0 \quad (i=1,2,\ldots,n,n+1,\ldots,2n),$$

или в более подробной записи:

$$
\begin{gathered}
\hat{b}^{(1)}_{m1}\psi_1(T)+\cdots+\hat{b}^{(1)}_{mn}\psi_n(T)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\hat{b}^{(1)}_{11}\psi_1(T)+\cdots+\hat{b}^{(1)}_{1n}\psi_n(T)=0,\\
\hat{b}^{(0)}_{n-m,1}\psi_1(0)+\cdots+\hat{b}^{(0)}_{n-m,n}\psi_n(0)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\hat{b}^{(0)}_{11}\psi_1(0)+\cdots+\hat{b}^{(0)}_{1n}\psi_n(0)=0,\\
\bar{b}^{(1)}_{n-m,1}\psi_1(T)+\cdots+\bar{b}^{(1)}_{n-m,n}\psi_n(T)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\bar{b}^{(1)}_{11}\psi_1(T)+\cdots+\bar{b}^{(1)}_{1n}\psi_n(T)=0,\\
\bar{b}^{(0)}_{m,1}\psi_1(0)+\cdots+\bar{b}^{(0)}_{m,n}\psi_n(0)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\bar{b}^{(0)}_{11}\psi_1(0)+\cdots+\bar{b}^{(0)}_{1n}\psi_n(0)=0.
\end{gathered}
\tag{2.23}
$$

Покажем, что определитель $2n\times 2n-$матрицы

$$
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \hat{b}^{(1)}_{m1} & \cdots & \hat{b}^{(1)}_{mn}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & \cdots & 0 & \hat{b}^{(1)}_{11} & \cdots & \hat{b}^{(1)}_{1n}\\
\hat{b}^{(0)}_{n-m,1} & \cdots & \hat{b}^{(0)}_{n-m,n} & 0 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\hat{b}^{(0)}_{11} & \cdots & \hat{b}^{(0)}_{1n} & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & \bar{b}^{(1)}_{n-m,1} & \cdots & \bar{b}^{(1)}_{n-m,n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & \cdots & 0 & \bar{b}^{(1)}_{11} & \cdots & \bar{b}^{(1)}_{1n}\\
\bar{b}^{(0)}_{m,1} & \cdots & \bar{b}^{(0)}_{m,n} & 0 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\bar{b}^{(0)}_{11} & \cdots & \bar{b}^{(0)}_{1n} & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} := G
\tag{2.24}
$$

системы линейных алгебраических уравнений (2.23) относительно неизвестных $\psi_1(0),\ldots,\psi_n(0),\psi_1(T),\ldots,\psi_n(T)$ отличен от нуля. Действительно, в силу теоремы Лапласа (см., напр.,[7], с.51), сумма всех миноров $n-$го порядка, содержащихся в последних n строках матрицы G, на их алгебраические дополнения равна определителю этой матрицы. Но в строках матрицы G с номерами $n+1,\ \ldots\ ,\ 2n$ имеется лишь один минор $n-$го порядка: его элементы находятся в i_1-м, $\ldots$, i_m-м столбцах и строках с номерами $2n-m+1,\ \ldots\ 2n$ и образуют матрицу $(B^T_{01})^{-1}$, а также в столбцах с номерами $n+i'_1,\ \ldots\ ,\ n+i'_m$ и строках $n+1,\ \ldots\ ,\ 2n-m$ и образуют матрицу $(B_{11}^T)^{-1}$. Дополнительный к нему минор равен определителю, элементы которого расположены в строках с номерами $1, \dots, m$ и столбцах с номерами $n + j'_1$, $\dots, n + j'_l$ и образуют матрицу E_m, а также в в строках с номерами $m+1, \dots,$ n и столбцах с номерами $j_1, \dots, j_l$ и образуют матрицу E_{n-m}. Поэтому, применяя теорему Лапласа также и для вычисления указанных миноров получим, что

$$\det G = (-1)^{i_1+\dots+i_m+2n-m+1+\dots+2n+n+i'_1+\dots+n+i'_{n-m}+(n+1)+\dots+2n-m}\times$$

$$\times(-1)^{i_1+\dots+i_m+2n-m+1+\dots+2n}\det(B_{01}^T)^{-1}\det(B_{11}^T)^{-1}(-1)^{n+j'_1+\dots+n+j'_m+1+\dots+m} =$$

$$= (-1)^{i'_1+\dots+i'_{n-m}+j'_1+\dots+j'_m}(-1)^{n^2}(-1)^{1+\dots+m+(n+1)+\dots+2n-m}\det(B_{01}^T)^{-1}\det(B_{11}^T)^{-1} =$$

$$= (-1)^{m^2}\det(B_{01}^T)^{-1}\det(B_{11}^T)^{-1} = \frac{(-1)^m}{\det B_{01}\det B_{11}} \neq 0.$$

Отсюда вытекает, что система линейных алгебраических уравнений (2.23) имеет лишь тривиальное решение $\psi_1(0) = \dots = \psi_n(0) = \psi_1(T) = \dots = \psi_n(T) = 0$. Но тогда $\psi(t) \equiv 0$, что противоречит линейной независимости функций $\psi^{(1)}(t), \dots,$ $\psi^{(n-r)}(t)$ (см. равенство (2.22)). Полученное противоречие показывает, что система линейных алгебраических уравнений (2.19) имеет $n - r$ линейно независимых решений (2.20). Но тогда ранг матрицы (1.9) системы (2.19) не превышает r, а это невозможно, т.к. ранг этой матрицы равен n по предположению.

Таким образом наше первоначальное предположение о том, что ранг матрицы (2.17) меньше n ведет к противоречию. Поэтому ранг этой матрицы равен n и, следовательно, однородная краевая задача (1.3), (1.4) имеет только тривиальное решение.

Проведенный анализ показывает, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если однородная краевая задача (1.3), (1.4) имеет лишь тривиальное решение, то сопряженная к ней краевая задача (2.11), (2.12) также имеет лишь тривиальное решение.*

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 неоднородная краевая задача (2.13), (2.14) имеет одно и только одно решение.*

Доказательство. В силу теоремы 2 сопряженная к (1.3), (1.4) краевая задача (2.11), (2.12) имеет лишь тривиальное решение. Дословно повторяя далее доказательство теоремы 1, придем к утверждению теоремы.

3 Постановка задачи минимаксного оценивания

Пусть на отрезке $(\alpha, \beta) \subseteq (0, T)$ наблюдается вектор-функция $y(t)$ со значениями из пространства R^l, вида

$$y(t) = H(t)\varphi(t) + \xi(t), \tag{3.1}$$

где $H(t)$ – матрица размерности $l \times n$, элементы которой являются непрерывными функциями на отрезке $[\alpha, \beta]$, $\xi(t)$ – случайный векторный процесс, со средним равным нулю, и неизвестной корреляционной матрицей $R(t,s) = M\xi(t)\xi^T(s)$ размерности $l \times l$. Допустим также, что вектор-функция $\varphi(t)$ является решением краевой задачи (1.1), (1.2).

Обозначим через V множество случайных векторных процессов $\xi(t)$, для которых корреляционные матрицы $R(t,s)$ принадлежат множеству

$$\left\{R : \int_\alpha^\beta Sp\,[Q(t)R(t,t)]dt \le 1\right\}, \tag{3.2}$$

и положим

$$G = \left\{(f_0, f_1, f(\cdot)) : (Q_0 f_0, f_0)_m + (Q_1 f_1, f_1)_{n-m} + \int_0^T (Q_2(t)f(t), f(t))_n dt \le 1\right\}, \tag{3.3}$$

где $Q(t)$, Q_0, Q_1 и $Q_2(t)$ положительно определенные матрицы размерностей $l \times l$, $m \times m$, $(n-m)\times(n-m)$ и $n \times n$ соответственно, причем элементы матриц $Q(t)$, $Q^{-1}(t)$ и $Q_2(t)$, $Q_2^{-1}(t)$ непрерывны на отрезках $[\alpha, \beta]$, и $[0, T]$ и через $\mathrm{Sp}\,B$ обозначен след матрицы $B = b_{ij}{}_{i,j=1}^{l}$, т.е. величина $\sum_{i=1}^{l} b_{ii}$.

Пусть правые части $f(\cdot)$, f_0, f_1 уравнения (1.1) и краевых условий (1.2) неизвестны точно, а известно лишь, что элемент $\tilde f := (f_0, f_1, f(\cdot))$ принадлежит множеству G, и, кроме того, $\xi(t) \in V$.

Будем искать оценку скалярного произведения $(a, \varphi(s))_n$, в классе линейных по наблюдениям оценок вида

$$(\widehat{a, \varphi(s)})_n = \int_\alpha^s (u_1(t), y(t))_l dt + \int_s^\beta (u_2(t), y(t))_l dt + c, \tag{3.4}$$

где $s \in (\alpha, \beta)$, a – заданный вектор, принадлежащий пространству $\mathbb{R}^n$, $u_i(t)$, $i = 1, 2$ – непрерывные вектор-функции на отрезках $[\alpha, s]$ и $[s, \beta]$ соответственно, c – некоторая константа.

Оценку

$$(\widehat{\widehat{a, \varphi(s)}})_n = \int_\alpha^s (\hat u_1(t), y(t))_l dt + \int_s^\beta (\hat u_2(t), y(t))_l dt + \hat c$$

для которой вектор-функции $\hat u_1(t), \hat u_2(t)$ и константа $\hat c$ находятся из условия:

$$\inf_{u_1, u_2, c} \sup_{\tilde f \in G,\, \xi \in V} M[(a, \varphi(s))_n - (\widehat{a, \varphi(s)})_n]^2 = \sup_{\tilde f \in G,\, \xi \in V} M[(a, \varphi(s))_n - (\widehat{\widehat{a, \varphi(s)}})_n]^2, \tag{3.5}$$

назовем минимаксной оценкой скалярного произведения $(a, \varphi(s))_n$, а величину

$$\sigma = \{\sup_{\tilde f \in G,\, \xi \in V} M[(a, \varphi(s))_n - (\widehat{\widehat{a, \varphi(s)}})_n]^2, \}^{1/2}$$

– погрешностью минимаксного оценивания.

Таким образом, оценка, на которой достигается минимум максимальной среднеквадратической погрешности оценивания, рассчитанной на "наихудшие"реализации возмущений, называется минимаксной среднеквадратической оценкой скалярного произведения $(a, \varphi(s))_n$.

4 Сведение задачи минимаксного оценивания к решению задачи оптимального управления

В этом параграфе мы покажем, что решение задачи минимаксного оценивания сводится к решению некоторой задачи оптимального управления.

Положим $u := (u_1, u_2)$ и введем вектор-функции $z_1(t; u)$, $z_2(t; u)$, $z_3(t; u)$, $z_4(t; u)$ как решение следующей краевой задачи:

$$L^* z_1(t; u) = 0, \quad 0 < t < \alpha, \quad \hat{B}_0 z_1(0; u) = 0,$$

$$L^* z_2(t; u) = -H^T(t) u_1(t), \quad \alpha < t < s, \quad z_2(\alpha; u) = z_1(\alpha; u),$$
$$L^* z_3(t; u) = -H^T(t) u_2(t), \quad s < t < \beta, \quad z_3(s; u) = z_2(s; u) - a,$$

$$L^* z_4(t; u) = 0, \quad \beta < t < T, \quad z_4(\beta; u) = z_3(\beta; u), \quad \hat{B}_1 z_4(T; u) = 0, \tag{4.1}$$

где

$$L^* z(t) = -\frac{dz(t)}{dt} + A^T(t) z(t).$$

Лемма 1. *Задача нахождения минимаксной оценки скалярного произведения $(a, \varphi(s))_n$ эквивалентна задаче оптимального управления системой, описываемой краевой задачей (4.1) с функцией стоимости вида*

$$I(u) = (Q_0^{-1} \bar{B}_0 z_1(0; u), \bar{B}_0 z_1(0; u))_m + (Q_1^{-1} \bar{B}_1 z_4(T; u), \bar{B}_1 z_4(T; u))_{n-m}$$
$$+ \int_0^\alpha (Q_2^{-1}(t) z_1(t; u), z_1(t; u))_n dt + \int_\alpha^s (Q_2^{-1}(t) z_2(t; u), z_2(t; u))_n dt$$
$$+ \int_s^\beta (Q_2^{-1}(t) z_3(t; u), z_3(t; u))_n dt + \int_\beta^T (Q_2^{-1}(t) z_4(t; u), z_4(t; u))_n dt$$

$$+ \int_\alpha^s \left(Q^{-1}(t) u_1(t), u_1(t)\right)_l dt + \int_s^\beta \left(Q^{-1}(t) u_2(t), u_2(t)\right)_l dt. \tag{4.2}$$

Доказательство. Покажем сначала, что задача (4.1) однозначно разрешима при условии, что функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ принадлежат соответственно пространствам $L^2(\alpha, s)$ и $L^2(s, \beta)$. В этом случае решения $z_2(x; u)$ и $z_3(x; u)$ второго и третьего уравнений в (4.1) интерпретируются как абсолютно непрерывные функции[1], удовлетворяющие этим уравнениям почти всюду соответственно на $[\alpha, s]$ и $[s, \beta]$, а также условиям сопряжения $z_2(\alpha; u) = z_1(\alpha; u)$, $z_3(s; u) = z_2(s; u) - a$ и $z_3(\beta; u) = z_4(\beta; u)$.

Поскольку однородная краевая задача (1.3), (1.4) имеет только тривиальное решение то, в силу теоремы 3, краевая задача

$$L^*\psi(t) = g(t), \quad 0 < t < T, \quad \hat{B}_0\psi(0) = 0, \quad \hat{B}_1\psi(T) = 0 \tag{4.3}$$

имеет единственное решение при любой правой части и, в частности, при

$$g(t) = g(t; u) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \alpha; \\ -H^T(t)u_1(t), & \alpha < t < s; \\ -H^T(t)u_1(t), & s < t < \beta; \\ 0, & \beta < t < T, \end{cases} \tag{4.4}$$

а в точках $t = \alpha, s, \beta$ функция $g(t)$ может быть определена произвольным образом.

Обозначим это решение через $\bar{z}(t; u)$, а его сужения на интервалы $(0, \alpha)$, (α, s), (s, β) и (β, T) соответственно через $\bar{z}_1(t; u)$, $\bar{z}_2(t; u)$, $\bar{z}_3(t; u)$, $\bar{z}_4(t; u)$. Функция $\bar{z}(t; u)$ является абсолютно непрерывной на отрезке $[0, T]$ (см. [1]).

Покажем теперь, что задача

$$L^*\bar{\bar{z}}^{(1)}(t) = 0, \quad 0 < t < \alpha, \quad \hat{B}_0\bar{\bar{z}}^{(1)}(0) = 0,$$

$$L^*\bar{\bar{z}}^{(2)}(t) = 0, \quad \alpha < t < s, \quad \bar{\bar{z}}^{(2)}(\alpha; u) = \bar{\bar{z}}^{(1)}(\alpha; u),$$
$$L^*\bar{\bar{z}}^{(3)}(t) = 0, \quad s < t < \beta, \quad \bar{\bar{z}}^{(3)}(s; u) = \bar{\bar{z}}^{(2)}(s) - a,$$

$$L^*\bar{\bar{z}}^{(4)}(t) = 0, \quad \beta < t < T, \quad \bar{\bar{z}}^{(4)}(\beta) = \bar{\bar{z}}^{(3)}(\beta), \quad \hat{B}_1\bar{\bar{z}}^{(4)}(T) = 0 \tag{4.5}$$

имеет единственное решение при любом векторе $a \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\bar{\bar{z}}_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, 4}$, координаты вектор-функции $\bar{\bar{z}}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, 4}$. Пусть $y_{ik}(t)$, $i, k = \overline{1, n}$ – фундаментальная система решений для системы уравнений $L^*z(t) = 0$ на отрезке $[0, T]$. Тогда функции $\bar{\bar{z}}_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, 4}$, можно представить в виде

$$\bar{\bar{z}}_i^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(j)} y_{ik}(t),$$

где $c_k^{(j)}$ – постоянные величины. Учитывая граничные условия в точках $t = 0, T$ и условия сопряжения в точках $t = \alpha, s, \beta$ в (4.5), получим что тогда решение краевой

[1] **Определение.** Пусть на сегменте $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Если всякому $\epsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы взаимно не пересекающихся интервалов $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$, для которой $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ оказывается $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$, то говорят, что функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$.

Очевидно, что всякая абсолютно непрерывная функция непрерывна в обычном смысле слова. Обратное неверно. Известно (см., напр., [6]), что абсолютно непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция дифференцируема на этом сегменте почти всюду.

задачи (4.5) эквивалентно решению следующей системы линейных алгебраических уравнений с $4n$ неизвестными $c_k^{(j)}$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,4}$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{0} c_k^{(1)} &= 0, \quad i = \overline{1, n-m}, && (4.6)\\
\sum_{k=1}^{n} y_{ik}(\alpha)(c_k^{(1)} - c_k^{(2)}) &= 0, \quad i = \overline{1,n}, && (4.7)\\
\sum_{k=1}^{n} y_{ik}(s)(c_k^{(2)} - c_k^{(3)}) &= a_i, \quad i = \overline{1,n}, && (4.8)\\
\sum_{k=1}^{n} y_{ik}(\beta)(c_k^{(3)} - c_k^{(4)}) &= 0, \quad i = \overline{1,n}, && (4.9)\\
\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{1} c_k^{(4)} &= 0, \quad i = \overline{1,m}, && (4.10)
\end{aligned}
$$

где

$$a_{ik}^{0} = \sum_{r=1}^{n} \hat{b}_{ir}^{(0)} y_{rk}(0), \quad i = \overline{1, n-m}, \quad k = \overline{1,n},$$

$$a_{ik}^{1} = \sum_{s=1}^{n} \hat{b}_{is}^{(1)} y_{sk}(T), \quad i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n},$$

а через a_i, $i = \overline{1,n}$, обозначены координаты вектора a, через $\hat{b}_{ir}^{(0)}$, $i = \overline{1,n-m}$, $r = \overline{1,n}$, и $\hat{b}_{is}^{(1)}$, $i = \overline{1,m}$, $s = \overline{1,n}$, обозначены элементы матриц $\hat{B}_0$ и $\hat{B}_1$ соответственно.

Покажем, что система (4.6) – (4.10) однозначно разрешима при любом векторе $a \in \mathbb{R}^n$. Для этого заметим, что однородная система (4.6) – (4.10) (при $a = 0$) будет иметь лишь тривиальное решение.

В самом деле, из уравнений (4.7), (4.8), в котором положено $a = 0$ и (4.9), учитывая что $\det\{y_{ik}(\alpha)\}_{i,k=1}^{n} \neq 0$, $\det\{y_{ik}(s)\}_{i,k=1}^{n} \neq 0$ и $\det\{y_{ik}(\beta)\}_{i,k=1}^{n} \neq 0$, в силу того, что $y_{ik}(t)$, $i,k = \overline{1,n}$ – фундаментальная система решений для системы уравнений $L^* z(t) = 0$ на отрезке $[0,T]$, находим

$$c_k^{(1)} = c_k^{(2)} = c_k^{(3)} = c_k^{(4)} =: c_k.$$

В силу того, что коэффициенты c_k удовлетворяют уравнениям (4.6) и (4.10), вектор-функция $\psi(t)$ с компонентами $\psi_i(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_{ik}(t)$, $i = \overline{1,n}$ является решением сопряженной краевой задачи (2.11), (2.12), которая имеет только тривиальное решение $\psi(t) \equiv 0$ на отрезке $[0,T]$. Отсюда вытекает, что $c_k = 0$ и, таким образом, однородная система линейных алгебраических уравнений (4.6) – (4.10) (при $a = 0$) имеет лишь тривиальное решение. Поэтому система (4.6) – (4.10), а значит и эквивалентная ей краевая задача (4.5) имеет единственное решение при любом векторе $a \in \mathbb{R}^n$.

Но тогда вектор-функции $z_i(t;u) = \bar{z}_i(t;u) + \bar{\bar{z}}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,4}$, будут единственным решением краевой задачи (4.1).

Покажем далее, что задача нахождения минимаксной оценки скалярного произведения $(a, \varphi(s))_n$ эквивалентна задаче оптимального управления системой (4.1) с функцией стоимости (4.2).

Из второго и третьего уравнений (4.1) легко следуют соотношения

$$-\int_\alpha^s (H^T(t)u_1(t), \varphi(t))_n dt = (z_2(\alpha;u), \varphi(\alpha))_n - (z_2(s;u), \varphi(s))_n$$

$$+ \int_\alpha^s (z_2(t;u), f(t))_n dt,$$

$$-\int_s^\beta (H^T(t)u_2(t), \varphi(t))_n dt = (z_3(s;u), \varphi(s))_n - (z_3(\beta;u), \varphi(\beta))_n$$

$$+ \int_s^\beta (z_3(t;u), f(t))_n dt.$$

Учитывая, равенства

$$z_2(\alpha;u) = z_1(\alpha;u), \quad z_2(s;u) - z_3(s;u) = a, \quad z_3(\beta;u) = z_4(\beta;u),$$

$$(z_1(\alpha;u), \varphi(\alpha))_n = \int_0^\alpha d(z_1(t;u), \varphi(t))_n + (z_1(0;u), \varphi(0))_n,$$

$$(z_4(\beta;u), \varphi(\beta))_n = -\int_\beta^T d(z_4(t;u), \varphi(t))_n + (z_4(T;u), \varphi(T))_n,$$

а также тот факт, что (см. рассуждения на стр. 8)

$$(z_1(0;u), \varphi(0))_n = \left(\bar{B}_0 z_1(0;u), B_0\varphi(0)\right)_m + \left(\hat{B}_0 z_1(0;u), \tilde{B}_0\varphi(0)\right)_{n-m} = \left(\bar{B}_0 z_1(0;u), f_0\right)_m,$$

$$(z_4(T;u), \varphi(T))_n = \left(\bar{B}_1 z_4(T;u), B_1\varphi(T)\right)_{n-m} + \left(\hat{B}_1 z_4(T;u), \tilde{B}_1\varphi(T)\right)_m = \left(\bar{B}_1 z_4(T;u), f_1\right)_{n-m},$$

получим

$$(a, \varphi(s))_n - (\widehat{a, \varphi(s)})_n = (z_2(s;u), \varphi(s))_n - (z_3(s;u), \varphi(s))_n - (\widehat{a, \varphi(s)})_n =$$

$$= (z_2(\alpha;u), \varphi(\alpha))_n + \int_\alpha^s (H^T(t)u_1(t), \varphi(t))_n dt + \int_\alpha^s (z_2(t;u), f(t))_n dt$$

$$- (z_3(\beta;u), \varphi(\beta))_n + \int_s^\beta (H^T(t)u_2(t), \varphi(t))_n dt + \int_s^\beta (z_3(t;u), f(t))_n dt$$

$$- \int_\alpha^s (u_1(t), y(t))_l dt - \int_s^\beta (u_2(t), y(t))_l dt - c$$

$$= \int_0^\alpha d(z_1(t;u), \varphi(t))_n + (z_1(0;u), \varphi(0))_n + \int_\alpha^s (H^T(t)u_1(t), \varphi(t))_n dt$$

$$+\int_\alpha^s (z_2(t;u),f(t))_n dt+\int_\beta^T d(z_4(t;u),\varphi(t))_n-(z_4(T;u),\varphi(T))_n$$

$$+\int_s^\beta (H^T(t)u_2(t),\varphi(t))_n dt+\int_s^\beta (z_3(t;u),f(t))_n dt-\int_\alpha^s (H^T(t)u_1(t),\varphi(t))_n dt$$

$$-\int_\alpha^s (u_1(t),\xi(t)_l dt-\int_s^\beta (H^T(t)u_2(t),\varphi(t))_n dt-\int_s^\beta (u_2(t),\xi(t)_l dt-c$$

$$=\int_0^\alpha \left(\frac{dz_1(t;u)}{dt},\varphi(t)\right)_n dt+\int_0^\alpha \left(\frac{d\varphi(t)}{dt},z_1(t;u)\right)_n dt+(\bar B_0 z_1(0;u),f_0)_m$$

$$+\int_\alpha^s (z_2(t;u),f(t))_n dt+\int_\beta^T \left(\frac{dz_4(t;u)}{dt},\varphi(t)\right)_n dt+\int_\beta^T \left(\frac{d\varphi(t)}{dt},z_4(t;u)\right)_n dt$$

$$-(\bar B_1 z_4(T;u),f_1)_{n-m}+\int_s^\beta (z_3(t;u),f(t))_n dt-\int_\alpha^s (u_1(t),\xi(t)_l dt-\int_s^\beta (u_2(t),\xi(t)_l dt-c.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{dz_1(t;u)}{dt}=A^T(t)z_1(t;u) \quad \text{на} \quad (0,\alpha), \quad \frac{dz_4(t;u)}{dt}=A^T(t)z_4(t;u) \quad \text{на} \quad (\beta,T)$$

$$\text{и} \quad \frac{d\varphi(t)}{dt}=f(t)-A(t)\varphi(t) \quad \text{на} \quad (0,T),$$

и, следовательно,

$$\int_0^\alpha \left(\frac{dz_1(t;u)}{dt},\varphi(t)\right)_n dt+\int_0^\alpha \left(\frac{d\varphi(t)}{dt},z_1(t;u)\right)_n dt$$

$$=\int_0^\alpha (A^T(t)z_1(t;u),\varphi(t))_n dt+\int_0^\alpha (z_1(t;u),f(t)-A(t)\varphi(t))_n dt=\int_0^\alpha (z_1(t;u),f(t))_n dt,$$

$$\int_\beta^T \left(\frac{dz_4(t;u)}{dt},\varphi(t)\right)_n dt+\int_\beta^T \left(\frac{d\varphi(t)}{dt},z_4(t;u)\right)_n dt=\int_\beta^T (z_4(t;u),f(t))_n dt,$$

из последнего равенства находим

$$(a,\varphi(s))_n-(\widehat{a,\varphi(s)})_n=\left(\bar B_0 z_1(0;u),f_0\right)_m+\int_0^T (\tilde z(t;u),f(t))_n dt$$

$$-\left(\bar B_1 z_4(T;u),f_1\right)_{n-m}-\int_\alpha^s (u_1(t),\xi(t))_l dt-\int_s^\beta (u_2(t),\xi(t))_l dt-c=:\eta, \tag{4.11}$$

где

$$\tilde z(t;u)=\begin{cases} z_1(t;u), & 0<t<\alpha;\\ z_2(t;u), & \alpha<t<s;\\ z_3(t;u), & s<t<\beta;\\ z_4(t;u), & \beta<t<T.\end{cases}$$

Отсюда, учитывая что $\xi(t)$ – векторный процесс со средним равным нулю, а также условие (3.2) и известное соотношение $D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2$ между дисперсией $D\eta := M[\eta - M\eta]^2$ случайной величины η и ее математическим ожиданием $M\eta$, получаем что

$$M\eta = \left(\bar{B}_0 z_1(0;u), f_0\right)_m + \int_0^T (\tilde{z}(t;u), f(t))_n dt - \left(\bar{B}_1 z_4(T;u), f_1\right)_{n-m} - c,$$

$$\eta - M\eta = -\int_\alpha^s (u_1(t), \xi(t))_l dt - \int_s^\beta (u_2(t), \xi(t))_l dt,$$

$$D\eta = M[\eta - M\eta]^2 = M\left[\int_\alpha^s (u_1(t), \xi(t))_l dt + \int_s^\beta (u_2(t), \xi(t))_l dt\right]^2,$$

$$M\eta^2 = D\eta + (M\eta)^2 = M\left[\int_\alpha^s (u_1(t), \xi(t))_l dt + \int_s^\beta (u_2(t), \xi(t))_l dt\right]^2$$

$$+\left[\left(\bar{B}_0 z_1(0;u), f_0\right)_m + \int_0^T (\tilde{z}(t;u, f(t))_n dt - \left(\bar{B}_1 z_4(T;u), f_1\right)_{n-m} - c\right]^2,$$

откуда следует, что

$$\inf_{c\in\mathbb{R}^1} \sup_{\tilde{f}\in G,\, \xi\in V} M[(a,\varphi(s))_n - \widehat{(a,\varphi(s))}_n]^2 =$$

$$= \inf_{c\in\mathbb{R}^1} \sup_{\tilde{f}\in G} \left[(\bar{B}_0 z_1(0;u), f_0)_m + \int_0^T (\tilde{z}(t;u), f(t))_n dt - (\bar{B}_1 z_4(T;u), f_1)_{n-m} - c\right]^2$$

$$+\sup_{\xi\in V} M\left[\int_\alpha^s (u_1(t), \xi(t))_l dt + \int_s^\beta (u_2(t), \xi(t))_l dt\right]^2. \tag{4.12}$$

Для вычисления точных верхних граней в правой части (4.12) воспользуемся обобщенным неравенством Коши-Буняковского [6], которое мы здесь приведем в удобном для дальнейшего использования виде.

Лемма. *Для любых* $f_0^{(1)}, f_0^{(2)} \in R^m$, $f_1^{(1)}, f_1^{(2)} \in R^{n-m}$, $f_1, f_2 \in \left(L^2(0,T)\right)^n$ *имеет место обобщенное неравенство Коши-Буняковского:*

$$\left|(f_0^{(1)}, f_0^{(2)})_m + (f_1^{(1)}, f_1^{(2)})_{n-m} + \int_0^T (f_1(t), f_2(t))_n\, dt\right| \leq$$

$$\leq \left\{(Q_0^{-1} f_0^{(1)}, f_0^{(1)})_m + (Q_1^{-1} f_1^{(1)}, f_1^{(1)})_{n-m} + \int_0^T (Q_2^{-1}(t) f_1(t), f_1(t))_n\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{(Q_0 f_0^{(2)}, f_0^{(2)})_m + (Q_1 f_1^{(2)}, f_1^{(2)})_{n-m} + \int_0^T (Q_2(t) f_2(t), f_2(t))_n\, dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

в котором знак равенства достигается при

$$f_0^{(2)} = \lambda Q_0^{-1} f_0^{(1)}, \quad f_1^{(2)} = \lambda Q_1^{-1} f_1^{(1)}, \quad f_2(t) = \lambda Q_2^{-1} f_1(t).$$

Полагая теперь в обобщенном неравенстве Коши-Буняковского

$$f_0^{(1)} = \bar{B}_0 z_1(0;u), \quad f_1^{(1)} = -\bar{B}_1 z_4(T;u), \quad f_1(t) = \tilde{z}(t;u),$$

$$f_0^{(2)} = f_0, \quad f_1^{(2)} = f_1, \quad f_2(t) = f(t),$$

и вводя обозначение

$$y := (\bar{B}_0 z_1(0;u), f_0)_m - (\bar{B}_1 z_4(T;u), f_1)_{n-m} + \int_0^T (\tilde{z}(t;u), f(t))_n \, dt$$

в силу (2.7) получим, что имеет место неравенство

$$|y| \leq \Big\{ (Q_0^{-1} \bar{B}_0 z_1(0;u), \bar{B}_0 z_1(0;u))_m + (Q_1^{-1} \bar{B}_1 z_4(T;u), \bar{B}_1 z_4(T;u))_{n-m} +$$

$$+ \int_0^T (Q_2^{-1}(t) \tilde{z}(t;u), \tilde{z}(t;u))_n dt \Big\}^{\frac{1}{2}} \times \Big\{ (Q_0 f_0, f_0)_m + (Q_1 f_1, f_1)_{n-m} +$$

$$+ \int_0^T (Q_2(t) f(t), f(t))_n dt \Big\}^{\frac{1}{2}} \leq \Big\{ (Q_0^{-1} \bar{B}_0 z_1(0;u), \bar{B}_0 z_1(0;u))_m$$

$$+ (Q_1^{-1} \bar{B}_1 z_4(T;u), \bar{B}_1 z_4(T;u))_{n-m} + \int_0^T (Q_2^{-1}(t) \tilde{z}(t;u), \tilde{z}(t;u))_n dt \Big\}^{\frac{1}{2}} := a,$$

где знак равенства достигается при

$$f_0 = \pm \frac{1}{a} Q_0^{-1} \bar{B}_0 z_1(0;u), \quad f_1 = \mp \frac{1}{a} Q_1^{-1} \bar{B}_1 z_4(T;u), \quad f(t) = \pm \frac{1}{a} Q_2(t) \tilde{z}(t;u).$$

Поэтому, учитывая плотность множества непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций, удовлетворяющих неравенству (3.3) в множестве функций, суммируемых с квадратом на $[0, T]$ и удовлетворяющих этому же неравенству, находим что

$$\inf_{c \in R^1} \sup_{\tilde{f} \in G_0} \left[(\bar{B}_0 z_1(0;u), f_0)_m - (\bar{B}_1 z_4(T;u), f_1)_{n-m} + \int_0^T (\tilde{z}(t;u), f(t))_n dt - c \right]^2 =$$

$$= \inf_{c \in R^1} \sup_{|y| \leq a} (\tilde{\sigma}(u) - c)^2 = a^2$$

$$= (Q_0^{-1} \bar{B}_0 z_1(0;u), \bar{B}_0 z_1(0;u))_m + (Q_1^{-1} \bar{B}_1 z_4(T;u), \bar{B}_1 z_4(T;u))_{n-m}$$

$$+ \int_0^T (Q_2^{-1}(t) \tilde{z}(t;u), \tilde{z}(t;u))_n dt. \tag{4.13}$$

Вычислим теперь второе слагаемое в правой части (4.12). Полагая

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u_1(t), & \alpha \le t < s; \\ u_2(t), & s < t \le \beta, \end{cases}$$

в силу обобщенного неравенства Коши-Буняковского имеем

$$M\left[\int_\alpha^s (u_1(t), \xi(t))_l dt + \int_s^\beta (u_2(t), \xi(t))_l dt\right]^2 = M\left[\int_\alpha^\beta (\tilde{u}(t), \xi(t))_l dt\right]^2$$

$$\le M\left[\int_\alpha^\beta (Q^{-1}(t)\tilde{u}(t), \tilde{u}(t))_l dt \cdot \int_\alpha^\beta (Q(t)\xi(t), \xi(t))_l dt\right]$$

$$= \int_\alpha^\beta (Q^{-1}(t)\tilde{u}(t), \tilde{u}(t))_l dt \cdot \int_\alpha^\beta M(Q(t)\xi(t), \xi(t))_l dt. \tag{4.14}$$

Преобразуем последний множитель в правой части неравенства (4.14):

$$\int_\alpha^\beta M(Q(t)\xi(t), \xi(t))_l dt = \int_\alpha^\beta M(\sum_{i=1}^l (Q(t)\xi(t))_i \xi_i(t))dt$$

$$= \int_\alpha^\beta M(\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^l q_{ik}\xi_k(t)\xi_i(t))dt = \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^l q_{ik} M(\xi_k(t)\xi_i(t))dt$$

$$= \int_\alpha^\beta Sp\,[Q(t)R(t,t)]dt.$$

Если далее принять во внимание (3.2), то из (4.14) получаем неравенство

$$\sup_{\xi\in V} M\left[\int_\alpha^s (u_1(t), \xi(t))_l dt + \int_s^\beta (u_2(t), \xi(t))_l dt\right]^2 \le$$

$$\le \int_\alpha^s \left(Q^{-1}(t)u_1(t), u_1(t)\right)_l dt + \int_s^\beta \left(Q^{-1}(t)u_2(t), u_2(t)\right)_l dt, \tag{4.15}$$

в котором, как легко убедиться непосредственно, знак равенства достигается на элементе

$$\tilde{\xi}(t) = \begin{cases} \dfrac{\eta Q^{-1}(t)u_1(t)}{\displaystyle\int_\alpha^s \left[\left(Q^{-1}(t)u_1(t), u_1(t)\right)_l dt + \int_s^\beta \left(Q^{-1}(t)u_2(t), u_2(t)\right)_l dt\right]^{1/2}}, & \alpha \le t < s; \\ \dfrac{\eta Q^{-1}(t)u_2(t)}{\displaystyle\int_\alpha^s \left[\left(Q^{-1}(t)u_1(t), u_1(t)\right)_l dt + \int_s^\beta \left(Q^{-1}(t)u_2(t), u_2(t)\right)_l dt\right]^{1/2}}, & s < t \le \beta, \end{cases}$$

где η – случайная величина, такая что $M\eta = 0$, $M\eta^2 = 1$. Поэтому из соотношений (4.12), (4.13) и (4.15) вытекает справедливость утверждения леммы. □

Следствие. *Вектор-функция $z_1(t;u)$, $z_2(t;u)$, $z_3(t;u)$, $z_4(t;u)$, являющаяся решением краевой задачи (4.1), а также векторы $\bar{B}_0 z_1(0;u)$ и $\bar{B}_1 z_4(T;u)$ не зависят от выбора невырожденных подматриц $B_{0,1}$ размерности $m \times m$ и $B_{1,1}$ размерности $(n-m)\times(n-m)$ матриц B_0 и B_1 соответственно.*

Доказательство. Выберем другую невырожденную подматрицу $B'_{0,1}$ размерности $m \times m$ матрицы B_0 и другую невырожденную подматрицу $B'_{1,1}$ размерности $(n-m)\times(n-m)$ матрицы B_1 и построим по этим подматрицам матрицы $\hat{B}'_0$, $\hat{B}'_1$, $\bar{B}'_0$ и $\bar{B}'_1$ аналогично тому как по матрицам $B_{0,1}$ и $B_{1,1}$ были построены матрицы $\hat{B}_0$, $\hat{B}_1$, $\bar{B}_0$ и $\bar{B}_1$ (см. стр. 6 и 6). Проведя далее дословно рассуждения, которые привели к соотношению (4.11), получим

$$(a,\varphi(s))_n - (\widehat{a,\varphi(s)})_n = \left(\bar{B}'_0 z'_1(0;u), f_0\right)_m + \int_0^T (\tilde{z}'(t;u), f(t))_n dt$$

$$-\left(\bar{B}'_1 z'_4(T;u), f_1\right)_{n-m} - \int_\alpha^s (u_1(t),\xi(t))_l dt - \int_s^\beta (u_2(t),\xi(t))_l dt - c, \tag{4.16}$$

где

$$\tilde{z}'(t;u) = \begin{cases} z'_1(t;u), & 0<t<\alpha; \\ z'_2(t;u), & \alpha<t<s; \\ z'_3(t;u), & s<t<\beta; \\ z'_4(t;u), & \beta<t<T, \end{cases}$$

а через [2] $z'_1(t;u)$, $z'_2(t;u)$, $z'_3(t;u)$, $z'_4(t;u)$, обозначено решение краевой задачи (4.1), в которой матрицы $\hat{B}_0$ и $\hat{B}_1$, заменены соответсвенно на матрицы $\hat{B}'_0$ и $\hat{B}'_1$. Вычитая почленно из равенства (4.11) равенство (4.16), находим

$$\left(\bar{B}_0 z_1(0;u) - \bar{B}'_0 z'_1(0;u), f_0\right)_m + \int_0^T (\tilde{z}(t;u) - \tilde{z}'(t;u), f(t))_n dt$$

$$-\left(\bar{B}_1 z_4(T;u) - \bar{B}'_1 z'_4(T;u), f_1\right)_{n-m} = 0. \tag{4.17}$$

Поскольку, в наших предположениях, краевая задача (1.1), (1.2), однозначно разрешима при любых вектор-функциях $f(t)$ с непрерывными на отрезке $[0,T]$ компонентами и любых векторах $f_0 \in \mathbb{R}^m$ и $f_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, то полагая сначала в соотношении (4.17) $f_0 = 0$ и $f_1 = 0$, получим что

$$\int_0^T (\tilde{z}(t;u) - \tilde{z}'(t;u), f(t))_n dt = 0$$

для любой непрерывной вектор-функции $f(t)$. Из последнего равенства, учитывая плотность множества непрерывных отрезке $[0,T]$ вектор-функций в пространстве

[2]здесь штрих не означает производную

вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^n$, компоненты которых суммируемы с квадратом на этом отрезке, вытекает что $\tilde{z}(t;u) = \tilde{z}'(t;u)$ или, что $z_1(t;u) = z_1'(t;u)$, $z_2(t;u) = z_2'(t;u)$, $z_3(t;u) = z_3'(t;u)$, $z_4(t;u) = z_4'(t;u)$. Полагая далее в (4.17) последовательно $f(t) = 0$, $f_1 = 0$ и $f(t) = 0$, $f_0 = 0$ находим что $\bar{B}_0 z_1(0;u) = \bar{B}'_0 z_1(0;u)$ и $\bar{B}_1 z_4(T;u) = \bar{B}'_1 z_4(T;u)$, что и требовалось доказать. $\square$

5 Минимаксные оценки функционалов от решений двухточечных краевых задач при квадратичных ограничениях на параметры

В этом параграфе будет получена теорема об общем виде минимаксных среднеквадратических оценок. Решая задачу оптимального управления (4.1),(4.2), придем к следующему результату.

Теорема 4. *Минимаксная оценка выражения $(a, \varphi(s))$ имеет вид*

$$\widehat{\widehat{(a, \varphi(s))}} = \int_\alpha^s (\hat{u}_1(t), y(t))_l dt + \int_s^\beta (\hat{u}_2(t), y(t))_l dt$$

где

$$\hat{u}_1(t) = Q(t)H(t)p_2(t), \quad \hat{u}_2(t) = Q(t)H(t)p_3(t), \tag{5.1}$$

а вектор-функции $p_1(t), p_2(t)$ находятся из решения систем уравнений:

$$L^* z_1(t) = 0, \quad 0 < t < \alpha, \quad \hat{B}_0 z_1(0) = 0,$$

$$L^* z_2(t) = -H^T(t)Q(t)H(t)p_2(t), \quad \alpha < t < s, \quad z_2(\alpha) = z_1(\alpha),$$
$$L^* z_3(t) = -H^T(t)Q(t)H(t)p_3(t), \quad s < t < \beta, \quad z_3(s) = z_2(s) - a,$$

$$L^* z_4(t) = 0, \quad \beta < t < T, \quad z_4(\beta) = z_3(\beta), \quad \hat{B}_1 z_4(T) = 0, \tag{5.2}$$

$$Lp_1(t) = Q_2^{-1}(t)z_1(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad B_0 p_1(0) = Q_0^{-1}\bar{B}_0 z_1(0),$$
$$Lp_2(t) = Q_2^{-1}(t)z_2(t), \quad \alpha < t < s, \quad p_2(\alpha) = p_1(\alpha),$$
$$Lp_3(t) = Q_2^{-1}(t)z_3(t), \quad s < t < \beta, \quad p_3(s) = p_2(s),$$
$$Lp_4(t) = Q_2^{-1}(t)z_4(t), \quad \beta < t < T, \quad p_4(\beta) = p_3(\beta), \quad B_1 p_4(T) = -Q_1^{-1}\bar{B}_1 z_4(T).$$

При этом погрешность минимаксного оценивания σ определяется по формуле

$$\sigma = (a, p_2(s))_n^{1/2}. \tag{5.3}$$

Система (5.2) однозначно разрешима.

Доказательство. Будем решать задачу оптимального управления (4.1), (4.2) при условии, что функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ принадлежат соответственно пространствам $L^2(\alpha,s)$ и $L^2(s,\beta)$. Представим решение $z_i(x;u)$, $i=\overline{1,4}$, задачи (4.1) в виде $z_i(t;u)=\bar z_i(t;u)+\bar{\bar z}_i(t)$, где через $\bar z_1(t;u)$, $\bar z_2(t;u)$, $\bar z_3(t;u)$, $\bar z_4(t;u)$ и $\bar{\bar z}_1(t)$, $\bar{\bar z}_2(t)$, $\bar{\bar z}_3(t)$, $\bar{\bar z}_4(t)$ обозначены решения этой же задачи соответственно при $a=0$ и при $u_1\equiv 0$, $u_2\equiv 0$. Тогда функционал (4.2) можно представить в виде

$$I(u)=\tilde I(u)+L(u)+A,$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde I(u)&=(Q_0^{-1}\bar B_0\bar z_1(0;u),\bar B_0\bar z_1(0;u))_m+(Q_1^{-1}\bar B_1\bar z_4(T;u),\bar B_1\bar z_4(T;u))_{n-m}\\
&+\int_0^\alpha (Q_2^{-1}(t)\bar z_1(t;u),\bar z_1(t;u))_n dt+\int_\alpha^s (Q_2^{-1}(t)\bar z_2(t;u),\bar z_2(t;u))_n dt\\
&+\int_s^\beta (Q_2^{-1}(t)\bar z_3(t;u),\bar z_3(t;u))_n dt+\int_\beta^T (Q_2^{-1}(t)\bar z_4(t;u),\bar z_4(t;u))_n dt\\
&+\int_\alpha^s \big(Q^{-1}(t)u_1(t),u_1(t)\big)_l dt+\int_s^\beta \big(Q^{-1}(t)u_2(t),u_2(t)\big)_l dt,\\
L(u)&=2(Q_0^{-1}\bar B_0\bar z_1(0;u),\bar B_0\bar{\bar z}_1(0))_m+2(Q_1^{-1}\bar B_1\bar z_4(T;u),\bar B_1\bar{\bar z}_4(T))_{n-m}\\
&+2\int_0^\alpha (Q_2^{-1}(t)\bar z_1(t;u),\bar{\bar z}_1(t))_n dt+2\int_\alpha^s (Q_2^{-1}(t)\bar z_2(t;u),\bar{\bar z}_2(t))_n dt\\
&+2\int_s^\beta (Q_2^{-1}(t)\bar z_3(t;u),\bar{\bar z}_3(t))_n dt+2\int_\beta^T (Q_2^{-1}(t)\bar z_4(t;u),\bar{\bar z}_4(t))_n dt,\\
A&=(Q_0^{-1}\bar B_0\bar{\bar z}_1(0),\bar B_0\bar{\bar z}_1(0))_m+(Q_1^{-1}\bar B_1\bar{\bar z}_4(T),\bar B_1\bar{\bar z}_4(T))_{n-m}\\
&+\int_0^\alpha (Q_2^{-1}(t)\bar{\bar z}_1(t),\bar{\bar z}_1(t))_n dt+\int_\alpha^s (Q_2^{-1}(t)\bar{\bar z}_2(t),\bar{\bar z}_2(t))_n dt\\
&+\int_s^\beta (Q_2^{-1}(t)\bar{\bar z}_3(t),\bar{\bar z}_3(t))_n dt+\int_\beta^T (Q_2^{-1}(t)\bar{\bar z}_4(t),\bar{\bar z}_4(t))_n dt.
\end{aligned}$$

В силу непрерывной зависимости решения $\bar z(t;u)$ краевой задачи (4.3) от правой части уравнения[3] $g(t;u)$, определенной формулой (4.4), функция $u\to\bar z(\cdot;u)$ представляет собой линейный ограниченный оператор, отображающий пространство $H=L^2(\alpha,s)\times L^2(s,\beta)$ в

$$H_1:=H^1(0,\alpha)\times H^1(\alpha,s)\times H^1(s,\beta)\times H^1(\beta,T),$$

где через $H^1(a,b)$ обозначено линейное подпространство в $L^2(a,b)$, состоящее из абсолютно непрерывных функций с производными из $L^2(a,b)$. Отсюда вытекает, что

[3]Этот факт следует из представления функции $\bar z(t;u)$ через матрицу Грина $G^*(t,\xi)$ краевой задачи (4.3) (см. [4], с. 115):

$$\bar z(t;u)=-\int_\alpha^s G^*(t,\xi)H^T(t)u_1(t)dt-\int_s^\beta G^*(t,\xi)H^T(t)u_2(t)dt.$$

$\tilde{I}(u)$ непрерывная квадратичная форма, соответствующая симметричной непрерывной билинейной форме

$$\pi(u,v) := (Q_0^{-1}\bar{B}_0\bar{z}_1(0;u), \bar{B}_0\bar{z}_1(0;v))_m + (Q_1^{-1}\bar{B}_1\bar{z}_4(T;u), \bar{B}_1\bar{z}_4(T;v))_{n-m}$$
$$+ \int_0^\alpha (Q_2^{-1}(t)\bar{z}_1(t;u), \bar{z}_1(t;v))_n dt + \int_\alpha^s (Q_2^{-1}(t)\bar{z}_2(t;u), \bar{z}_2(t;v))_n dt$$
$$+ \int_s^\beta (Q_2^{-1}(t)\bar{z}_3(t;u), \bar{z}_3(t;v))_n dt + \int_\beta^T (Q_2^{-1}(t)\bar{z}_4(t;u), \bar{z}_4(t;v))_n dt$$
$$+ \int_\alpha^s \left(Q^{-1}(t)u_1(t), v_1(t)\right)_l dt + \int_s^\beta \left(Q^{-1}(t)u_2(t), v_2(t)\right)_l dt,$$

$L(u)$ – линейный непрерывный функционал, заданные на H, а A – константа, не зависящая от u. Кроме того, поскольку

$$\tilde{I}(u) = \tilde{I}(u_1,u_2) \geq \int_\alpha^s \left(Q^{-1}(t)u_1(t), u_1(t)\right)_l dt +$$
$$+ \int_s^\beta \left(Q^{-1}(t)u_2(t), u_2(t)\right)_l dt \geq c\|u\|_H, \quad \text{c=const},$$

то, на основании теоремы 1.1 из [3], отсюда следует существование единственного элемента $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2) \in H$ такого, что [4]

$$I(\hat{u}_1,\hat{u}_2) = \inf_{(u_1,u_2)\in H} I(u_1,u_2) = \inf_{u_1\in L^2(\alpha,s), u_2\in L^2(s,\beta)} I(u_1,u_2).$$

Поэтому

$$\frac{d}{d\tau} I(\hat{u}_1 + \tau v_1, \hat{u}_2 + \tau v_2)\mid_{\tau=0} = 0, \quad \forall v = (v_1,v_2) \in H.$$

Отсюда, учитывая (4.2) и обозначения на стр. 25, находим

$$0 = \frac{1}{2}\frac{dI(\hat{u}+\tau v)}{d\tau} =$$
$$= \int_\alpha^s (Q^{-1}(t)\hat{u}_1, v_1)_l dt + \int_s^\beta (Q^{-1}(t)\hat{u}_2, v_2)_l dt +$$
$$+(Q_0^{-1}\bar{B}_0 z_1(0;\hat{u}), \bar{B}_0\bar{z}_1(0;v))_m + (Q_1^{-1}\bar{B}_1 z_4(T;\hat{u}), \bar{B}_1\bar{z}_4(T;v))_{n-m}$$
$$+ \int_0^\alpha (Q_2^{-1}(t)z_1(t;\hat{u}), \bar{z}_1(t;v))_n dt + \int_\alpha^s (Q_2^{-1}(t)z_2(t;\hat{u}), \bar{z}_2(t;v))_n dt$$
$$+ \int_s^\beta (Q_2^{-1}(t)z_3(t;\hat{u}), \bar{z}_3(t;v))_n dt + \int_\beta^T (Q_2^{-1}(t)z_4(t;\hat{u}), \bar{z}_4(t;v))_n dt \qquad (5.4)$$

[4]формулировку этой теоремы см. в дополнении на стр. 42

Введем функции $p_i(x),\ i=\overline{1,4}$ как единственное решение следующей задачи:

$$\begin{gathered}
Lp_1(t)=Q_2^{-1}(t)z_1(t;\hat{u}),\quad 0<t<\alpha,\quad B_0p_1(0)=Q_0^{-1}\bar{B}_0z_1(0;\hat{u}),\\
Lp_2(t)=Q_2^{-1}(t)z_2(t;\hat{u}),\quad \alpha<t<s,\quad p_2(\alpha)=p_1(\alpha),\\
Lp_3(t)=Q_2^{-1}(t)z_3(t;\hat{u}),\quad s<t<\beta,\quad p_3(s)=p_2(s),\\
Lp_4(t)=Q_2^{-1}(t)z_4(t;\hat{u}),\quad \beta<t<T,\\
p_4(\beta)=p_3(\beta),\quad B_1p_4(T)=-Q_1^{-1}\bar{B}_1z_4(T;\hat{u}),
\end{gathered}\tag{5.5}$$

и преобразуем сумму последних четырех слагаемых в правой части (5.4), принимая во внимание, что $(\bar{z}_1(0;v),p_1(0))_n=(\bar{B}_0\bar{z}_1(0;v),B_0p_1(0))_m$ и $(\bar{z}_4(T;v),p_4(T))_n=(\bar{B}_1\bar{z}_4(T;v),B_1p_4(T))_{n-m}$. Имеем

$$\int_0^{\alpha}(Q_2^{-1}(t)z_1(t;\hat{u}),\bar{z}_1(t;v))_ndt+\int_{\alpha}^{s}(Q_2^{-1}(t)z_2(t;\hat{u}),\bar{z}_2(t;v))_ndt$$

$$+\int_s^{\beta}(Q_2^{-1}(t)z_3(t;\hat{u}),\bar{z}_3(t;v))_ndt+\int_{\beta}^{T}(Q_2^{-1}(t)z_4(t;\hat{u}),\bar{z}_4(t;v))_ndt$$

$$=\int_0^{\alpha}(Lp_1(t),\bar{z}_1(t;v))_ndt+\int_{\alpha}^{s}(Lp_2(t),\bar{z}_2(t;v))_ndt$$

$$+\int_s^{\beta}(Lp_3(t),\bar{z}_3(t;v))_ndt+\int_{\beta}^{T}(Lp_4(t),\bar{z}_4(t;v))_ndt$$

$$=\int_0^{\alpha}(p_1(t),L^*\bar{z}_1(t;v))_ndt+(\bar{z}_1(\alpha;v),p_1(\alpha))_n-(\bar{z}_1(0;v),p_1(0))_n$$

$$+\int_{\alpha}^{s}(p_2(t),L^*\bar{z}_2(t;v))_ndt+(\bar{z}_2(s;v),p_2(s))_n-(\bar{z}_2(\alpha;v),p_2(\alpha))_n$$

$$+\int_s^{\beta}(p_3(t),L^*\bar{z}_3(t;v))_ndt+(\bar{z}_3(\beta;v),p_3(\beta))_n-(\bar{z}_3(s;v),p_3(s))_n$$

$$+\int_{\beta}^{T}(p_4(t),L^*\bar{z}_4(t;v))_ndt+(\bar{z}_4(T;v),p_4(T))_n-(\bar{z}_4(\eta;v),p_4(\beta))_n$$

$$=-(\bar{z}_1(0;v),p_1(0))_n+(\bar{z}_4(T;v),p_4(T))_n$$

$$-\int_{\alpha}^{s}(p_2(t),H^T(t)v_1(t))_ndt-\int_s^{\beta}(p_3(t),H^T(t)v_2(t))_ndt+(\bar{z}_2(s;v)-\bar{z}_3(s;v),p_2(s))_n$$

$$=-(\bar{B}_0\bar{z}_1(0;v),B_0p_1(0))_m+(\bar{B}_1\bar{z}_4(T;v),B_1p_4(T))_{n-m}$$

$$-\int_{\alpha}^{s}(H(t)p_2(t),v_1(t))_ldt-\int_s^{\beta}(H(t)p_3(t),v_2(t))_ldt$$

$$=-(\bar{B}_0\bar{z}_1(0;v),Q_0^{-1}\bar{B}_0z_1(0;\hat{u}))_m-(B_1\bar{z}_4(T;v),Q_1^{-1}\bar{B}_1z_4(T;\hat{u}))_{n-m}$$

$$-\int_{\alpha}^{s}(H(t)p_2(t),v_1(t))_l dt-\int_{s}^{\beta}(H(t)p_3(t),v_2(t))_l dt \tag{5.6}$$

Из равенств (5.4) – (5.6) вытекает, что

$$\int_{\alpha}^{s}(Q^{-1}(t)\hat{u}_1(t),v_1(t))_l dt+\int_{s}^{\beta}(Q^{-1}(t)\hat{u}_2(t),v_2(t))_l dt$$

$$=\int_{\alpha}^{s}(H(t)p_2(t),v_1(t))_l dt+\int_{s}^{\beta}(H(t)p_3(t),v_2(t))_l dt,$$

откуда получаем

$$Q^{-1}(t)\hat{u}_1(t)=H(t)p_2(t),\quad Q^{-1}(t)\hat{u}_2(t)=H(t)p_3(t),$$

$$\hat{u}_1(t)=Q(t)H(t)p_2(t),\quad \hat{u}_2(t)=Q(t)H(t)p_3(t). \tag{5.7}$$

Поскольку функции $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ и $p_4(t)$ являются абсолютно непрерывными соответственно на отрезках $[0,\alpha]$, $[\alpha,s]$, $[s,\beta]$ и $[\beta,T]$ как решение краевой задачи (5.5), то функции $\hat{u}_1(t)$ и $\hat{u}_2(t)$, осуществляющие оптимальное управление, являются непрерывными на отрезках $[\alpha,s]$ и $[s,\beta]$. Заменяя в уравнениях (4.1) функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на функции $\hat{u}_1(t)$ и $\hat{u}_2(t)$ $\hat{u}_1(t)$ и $\hat{u}_2(t)$, определенные по формулам (5.7) и вводя обозначения $z(t)=z(t;\hat{u})$ и придем к задаче (5.2) и равенствам (5.1).

Однозначная разрешимость этой задачи следует из единственности точки минимума $\hat{u}$ функционала (4.2) и из самого способа, которым эта задача получена.

Докажем теперь представление (5.3). Для этого, подставляя в формулу $\sigma^2=I(\hat{u})$ выражения (5.1) для $\hat{u}_1(t)$ и $\hat{u}_2(t)$, получим

$$\sigma^2=(Q_0^{-1}\bar{B}_0z_1(0),\bar{B}_0z_1(0))_m+(Q_1^{-1}\bar{B}_1z_4(T),\bar{B}_1z_4(T))_{n-m}$$

$$+\int_0^{\alpha}(Q_2^{-1}(t)z_1(t),z_1(t))_n dt+\int_{\alpha}^{s}(Q_2^{-1}(t)z_2(t),z_2(t))_n dt$$

$$+\int_s^{\beta}(Q_2^{-1}(t)z_3(t),z_3(t))_n dt+\int_{\beta}^{T}(Q_2^{-1}(t)z_4(t),z_4(t))_n dt$$

$$+\int_{\alpha}^{s}\left(Q(t)H(t)p_2(t),H(t)p_2(t)\right)_l dt+\int_{s}^{\beta}\left(Q(t)H(t)p_3(t),H(t)p_3(t)\right)_l dt. \tag{5.8}$$

Далее, проводя рассуждения аналогичные проведенным на странице 8, в силу (5.2) получаем

$$(z_1(0),p_1(0))_n=(\bar{B}_0z_1(0),B_0p_1(0))_m=(\bar{B}_0z_1(0),Q_0^{-1}\bar{B}_0z_1(0))_m,$$

откуда имеем

$$\int_0^{\alpha}(Q_2^{-1}(t)z_1(t),z_1(t))_n dt+\int_{\alpha}^{s}\left(Q(t)H(t)p_2(t),H(t)p_2(t)_l\right)_l dt$$

$$= \int_0^\alpha (Lp_1(t), z_1(t))_n dt - \int_\alpha^s (L^* z_2(t), p_2(t))_n dt$$

$$= \int_0^\alpha (p_1(t), L^* z_1(t))_n dt + (z_1(\alpha), p_1(\alpha))_n - (z_1(0), p_1(0))_n$$

$$- \int_\alpha^s (z_2(t), Lp_2(t))_n dt - (z_2(\alpha), p_2(\alpha))_n + (z_2(s), p_2(s))_n$$

$$= -(z_1(0), p_1(0))_n - \int_\alpha^s (z_2(t), Q_2^{-1}(t) z_2(t))_n dt + (z_2(s), p_2(s))_n$$

$$= - \int_\alpha^s (Q_2^{-1}(t) z_2(t), z_2(t))_n dt - (\bar{B}_0 z_1(0), Q_0^{-1} \bar{B}_0 z_1(0))_m + (z_2(s), p_2(s))_n \qquad (5.9)$$

Аналогично, в силу равенства

$$(z_4(T), p_4(T))_n = (\bar{B}_1 z_4(T), B_1 p_4(T))_{n-m} = -(\bar{B}_1 z_4(T), Q_1^{-1} \bar{B}_1 z_4(T))_{n-m},$$

получаем

$$\int_\beta^T (Q_2^{-1}(t) z_4(t), z_4(t))_n dt + \int_s^\beta (Q(t) H(t) p_3(t), H(t) p_3(t))_l \, dt$$

$$= \int_\beta^T (Lp_4(t), z_4(t))_n dt - \int_s^\beta (L^* z_3(t), p_3(t))_n dt$$

$$= \int_\beta^T (p_4(t), L^* z_4(t))_n dt + (p_4(T), z_4(T))_n - (p_4(\beta), z_4(\beta))_n$$

$$- \int_s^\beta (z_3(t), Lp_3(t))_n dt + (z_3(\beta), p_3(\beta))_n - (z_3(s), p_3(s))_n$$

$$= (p_4(T), z_4(T))_n - \int_\alpha^s (z_3(t), Q_2^{-1}(t) z_3(t))_n dt - (z_3(s), p_2(s))_n$$

$$= - \int_\alpha^s (Q_2^{-1}(t) z_3(t), z_3(t))_n dt - (\bar{B}_1 z_4(T), Q_1^{-1} \bar{B}_1 z_4(T))_{n-m} - (z_3(s), p_2(s))_n. \qquad (5.10)$$

Из соотношений (5.8) – (5.10) находим

$$\sigma^2 = (a, p_2(s)),$$

что и необходимо было доказать. $\square$

6 Альтернативное представление для минимаксных оценок

Получим теперь другое представление для минимаксной оценки величины $(a, \varphi(s))_n$. Для этого введем вектор-функции $\hat{p}_i(t), \hat{\varphi}_i(t), i = \overline{1,4}$ как решение системы уравнений:

$$L^*\hat{p}_1(t) = 0, \quad 0 < t < \alpha, \quad \hat{B}_0\hat{p}_1(0) = 0,$$
$$L^*\hat{p}_2(t) = H^T(t)Q(t)(y(t) - H(t)\hat{\varphi}_2(t)), \quad \alpha < t < s, \quad \hat{p}_2(\alpha) = \hat{p}_1(\alpha),$$
$$L^*\hat{p}_3(t) = H^T(t)Q(t)(y(t) - H(t)\hat{\varphi}_3(t)), \quad s < t < \beta, \quad \hat{p}_3(s) = \hat{p}_2(s),$$

$$L^*\hat{p}_4(t) = 0, \quad \beta < t < T, \quad \hat{p}_4(\beta) = \hat{p}_3(\beta), \quad \hat{B}_1\hat{p}_4(T) = 0, \tag{6.1}$$
$$L\hat{\varphi}_1(t) = Q_2^{-1}(t)\hat{p}_1(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad B_0\hat{\varphi}_1(0) = Q_0^{-1}\bar{B}_0\hat{p}_1(0),$$
$$L\hat{\varphi}_2(t) = Q_2^{-1}(t)\hat{p}_2(t), \quad \alpha < t < s, \quad \hat{\varphi}_2(\alpha) = \hat{\varphi}_1(\alpha),$$
$$L\hat{\varphi}_3(t) = Q_2^{-1}(t)\hat{p}_3(t), \quad s < t < \beta, \quad \hat{\varphi}_3(s) = \hat{\varphi}_2(s),$$
$$L\hat{\varphi}_4(t) = Q_2^{-1}(t)\hat{p}_4(t), \quad \beta < t < T,$$
$$\hat{\varphi}_4(\beta) = \hat{\varphi}_3(\beta), \quad B_1\hat{\varphi}_4(T) = -Q_1^{-1}\bar{B}_1\hat{p}_4(T).$$

Теорема 5. *Имеет место представление*

$$\widehat{\widehat{(a, \varphi(s))}}_n = (a, \hat{\varphi}_2(s))_n.$$

Доказательство. В силу (5.1), (6.1) имеем

$$\widehat{\widehat{(a, \varphi(s)_n)}} = \int_\alpha^s (\hat{u}_1(t), y(t))_l dt + \int_s^\beta (\hat{u}_2(t), y(t))_l dt$$

$$= \int_\alpha^s (Q(t)H(t)p_2(t), y(t))_l dt + \int_\alpha^s (Q(t)H(t)p_3(t), y(t))_l dt$$

$$= \int_\alpha^s (p_2(t), H^T(t)Q(t)y(t))_n dt + \int_\alpha^s (p_3(t), H^T(t)Q(t)y(t))_n dt. \tag{6.2}$$

Далее

$$\int_\alpha^s (p_2(t), H^T(t)Q(t)y(t))_l dt =$$

$$= \int_\alpha^s (p_2(t), L^*\hat{p}_2(t))_n dt + \int_\alpha^s (p_2(t), H^T(t)Q(t)H(t)\hat{\varphi}_2(t))_n dt$$
$$= \int_\alpha^s (Lp_2(t), \hat{p}_2(t))_n dt + (p_2(\alpha), \hat{p}_2(\alpha))_n - (p_2(s), \hat{p}_2(s))_n$$
$$+ \int_\alpha^s (H^T(t)Q(t)H(t)p_2(t), \hat{\varphi}_2(t))_n dt$$

$$= \int_\alpha^s (Q_2^{-1}(t)z_2(t), \hat{p}_2(t))_n dt + (p_2(\alpha), \hat{p}_2(\alpha))_n - (p_2(s), \hat{p}_2(s))_n$$

$$- \int_\alpha^s (L^* z_2(t), \hat{\varphi}_2(t))_n dt$$

$$= \int_\alpha^s (z_2(t), L\hat{\varphi}_2(t))_n dt + (p_2(\alpha), \hat{p}_2(\alpha))_n - (p_2(s), \hat{p}_2(s))_n - \int_\alpha^s (z_2(t), L\hat{\varphi}_2(t))_n dt$$

$$+(z_2(s), \hat{\varphi}_2(s))_n - (z_2(\alpha), \hat{\varphi}_2(\alpha))_n$$

$$= (p_2(\alpha), \hat{p}_2(\alpha))_n - (p_2(s), \hat{p}_2(s))_n + (z_2(s), \hat{\varphi}_2(s))_n - (z_2(\alpha), \hat{\varphi}_2(\alpha))_n. \tag{6.3}$$

Аналогично

$$\int_s^\beta (p_3(t), H^T(t)Q(t)y(t))_l dt =$$

$$= (p_3(s), \hat{p}_3(s))_n - (p_3(\beta), \hat{p}_3(\beta))_n + (z_3(\beta), \hat{\varphi}_3(\beta))_n - (z_3(s), \hat{\varphi}_3(s))_n \tag{6.4}$$

Из (6.2), (6.3) и (6.4) следует

$$\widehat{(a, \widehat{\varphi(s)})} = (p_1(\alpha), \hat{p}_1(\alpha))_n -$$

$$(z_1(\alpha), \hat{\varphi}_1(\alpha))_n - (p_4(\beta), \hat{p}_4(\beta))_n + (z_4(\beta), \hat{\varphi}_4(\beta))_n + (a, \hat{\varphi}_2(s))_n. \tag{6.5}$$

Но

$$0 = \int_0^\alpha (\hat{\varphi}_1(t), L^* \hat{z}_1(t))_n dt = \int_0^\alpha (L\hat{\varphi}_1(t), z_1(t))_n dt$$

$$-(z_1(\alpha), \hat{\varphi}_1(\alpha))_n + (z_1(0), \hat{\varphi}_1(0))_n$$

$$= \int_0^\alpha (z_1(t), Q_2(t)\hat{p}_1(t))_n dt - (z_1(\alpha), \hat{\varphi}_1(\alpha))_n + (z_1(0), \hat{\varphi}_1(0))_n, \tag{6.6}$$

$$0 = \int_0^\alpha (L^* \hat{p}_1(t), p_1(t))_n dt = \int_0^\alpha (\hat{p}_1(t), Lp_1(t))_n dt$$

$$-(\hat{p}_1(\alpha), p_1(\alpha))_n + (\hat{p}_1(0), p_1(0))_n$$

$$= \int_0^\alpha (\hat{p}_1(t), Q_2(t)p_1(t))_n dt - (\hat{p}_1(\alpha), p_1(\alpha))_n + (\hat{p}_1(0), p_1(0))_n. \tag{6.7}$$

Вычитая из равенства (6.6) равенство (6.7) получаем, что

$$0 = (\hat{p}_1(\alpha), p_1(\alpha))_n - (z_1(\alpha), \hat{\varphi}_1(\alpha))_n - (\hat{p}_1(0), p_1(0))_n + (z_1(0), \hat{\varphi}_1(0))_n$$

или

$$(\hat{p}_1(\alpha), p_1(\alpha))_n - (z_1(\alpha), \hat{\varphi}_1(\alpha))_n = (\hat{p}_1(0), p_1(0))_n - (z_1(0), \hat{\varphi}_1(0))_n. \tag{6.8}$$

Поскольку

$$(z_1(0), \hat{\varphi}_1(0))_n = (\bar{B}_0 z_1(0), B_0\hat{\varphi}_1(0))_m = (\bar{B}_0 z_1(0), Q_0^{-1}\bar{B}_0\hat{p}_1(0))_m,$$

$$(\hat{p}_1(0), p_1(0))_n = (\bar{B}_0\hat{p}_1(0), B_0 p_1(0))_m = (\bar{B}_0\hat{p}_1(0), Q_0^{-1}\bar{B}_0 z_1(0))_m,$$

то отсюда и из (6.8), учитывая что матрица Q_0^{-1} симметричная, находим

$$(\hat{p}_1(\alpha), p_1(\alpha))_n - (z_1(\alpha), \hat{\varphi}_1(\alpha))_n = 0. \tag{6.9}$$

Аналогично доказывается, что

$$-(p_4(\beta), \hat{p}_4(\beta))_n + (z_4(\beta), \hat{\varphi}_4(\beta))_n = 0. \tag{6.10}$$

Из соотношений (6.9), (6.10) и (6.5) следует, что

$$\widehat{(a, \varphi(s))} = (a, \hat{\varphi}_2(s)).$$

Отметим, что однозначная разрешимость задачи (6.1) доказывается аналогично как и в случае задачи (5.2), а именно можно показать, что уравнения (6.1) получаются в результате решения задачи оптимального управления системой

$$L^*\hat{p}_1(t;v) = 0, \quad 0 < t < \alpha, \quad \hat{B}_0\hat{p}_1(0;v) = 0,$$

$$L^*\hat{p}_2(t;v) = d(t) - H^T(t)v_1(t), \quad \alpha < t < s, \quad \hat{p}_1(\alpha;v) = \hat{p}_2(\alpha;v),$$

$$L^*\hat{p}_3(t;v) = d(t) - H^T(t)v_2(t), \quad s < t < \beta, \quad \hat{p}_2(s;v) = \hat{p}_3(s;v),$$

$$L^*\hat{p}_4(t;v) = 0, \quad \beta < t < T, \quad \hat{B}_1\hat{p}_4(T;v) = 0$$

с функцией стоимости

$$\begin{aligned} J(v) = {} & (Q_0^{-1}\bar{B}_0\hat{p}_1(0;v), \bar{B}_0\hat{p}_1(0;v))_m + (Q_1^{-1}\bar{B}_1\hat{p}_4(T;v), \bar{B}_1\hat{p}_4(T;v))_{n-m} \\ & + \int_0^\alpha (Q_2^{-1}(t)\hat{p}_1(t;v), \hat{p}_1(t;v))_n dt + \int_\alpha^s (Q_2^{-1}(t)\hat{p}_2(t;v), \hat{p}_2(t;v))_n dt \\ & + \int_s^\beta (Q_2^{-1}(t)\hat{p}_3(t;v), \hat{p}_3(t;v))_n dt + \int_\beta^T (Q_2^{-1}(t)\hat{p}_4(t;v), \hat{p}_4(t;v))_n dt \\ & + \int_\alpha^s \left(Q^{-1}(t)v_1(t), v_1(t)\right)_l dt + \int_s^\beta \left(Q^{-1}(t)v_2(t), v_2(t)\right)_l dt, \end{aligned}$$

где управление $v = (v_1, v_2) \in H$, а $d(t) = H^T(t)Q(t)y(t), \quad \alpha < t < \beta$. Теорема доказана. $\square$

Следствие. *Функцию $\hat{\varphi}_2(s)$ можно взять в качестве оценки решения $\varphi(s)$ исходной краевой задачи (1.1), (1.2).*

В качестве примера рассмотрим тот случай, когда на интервале $(0,T)$ наблюдается вектор-функция $y(t) = H(t)\varphi(t) + \xi(t)$, где вектор-функция $\varphi(t)$, принимающая значения в пространстве $\mathbb{R}^n$, является решением краевой задачи

$$L_1\varphi = f(t), \quad \varphi(0) = f_0, \quad \varphi(T) = f_1, \tag{6.11}$$

а оператор L_1 определен соотношением

$$L_1\varphi(t) = -\varphi''(t) + q(t)\varphi(t),$$

$q(t)$ – положительно определенная матрица размерности $n \times n$, элементы которой являются непрерывными функциями на отрезке $[0,T]$.

Заметим, что эта задача имеет единственное классическое решение, если $f(t)$ – непрерывная на отрезке $[0,T]$ функция и единственное обобщенное решение при $f(t) \in L_2(0,T)$.

Пусть матрица $H(t)$ и случайный процесс $\xi(t)$ такие же как и в предыдущем случае, а области V и G заданы в виде (3.2) и (3.3), причем матрицы Q_0, Q_1 и $Q_2(t)$, входящие в соотношение (3.3), имеют размерности $n \times n$.

Запишем уравнение (6.11) в виде системы первого порядка. Для этого положим $\varphi_1(t) = \varphi'(t)$, $\varphi_2(t) = \varphi(t)$ и введем вектор–функции

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d\tilde{\varphi}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \\ \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

с $2n$ компонентами, вектор $\tilde{a} = (0,a)$ с $2n$ компонентами, матрицу

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} O_{n,n} & -q(t) \\ -E_n & O_{n,n} \end{pmatrix}$$

размерности $2n \times 2n$, матрицы $B_0 = B_1 = \bar{B}_0 = \bar{B}_1 = (O_{n,n}, E_n)$, $\hat{B}_0 = \hat{B}_1 = (E_n, O_{n,n})$ и оператор

$$\tilde{L}\tilde{\varphi}(t) = -\frac{d\tilde{\varphi}(t)}{dt} + \tilde{A}^T(t)\tilde{\varphi}(t).$$

Тогда система (6.11) перепишется в виде

$$\tilde{L}\tilde{\varphi}(t) = \frac{d\tilde{\varphi}(t)}{dt} + A\tilde{\varphi}(t) = \tilde{f}(t), \quad B_0\tilde{\varphi}(0) = \tilde{f}_0, \quad B_1\tilde{\varphi}(T) = \tilde{f}_1. \tag{6.12}$$

Применяя теоремы 1 и 2 и производя в полученных уравнениях вида (5.2) и (6.1) упрощения, в соответствии с введенными выше обозначениями, легко получим, что имеет место

Теорема 6. *Минимаксная оценка выражения* $(a, \varphi(s))_n$ *имеет вид:*

$$\widehat{(a, \varphi(s))}_n = \int_0^s (\hat{u}_1(t), y(t))_l dt + \int_s^T (\hat{u}_2(t), y(t))_l dt = (a, \hat{\varphi}_2(s))_n,$$

при этом

$$\sigma^2 = (a, p_2(s))_n,$$

где $\hat{u}_1(t) = Q(t)H(t)p_2(t)$, $\hat{u}_2(t) = Q(t)H(t)p_3(t)$, *а вектор-функции* $\hat{\varphi}_2(t)$, p_2 *и* p_3 – *определяются из решения систем уравнений:*

$$L_1 z_2(t) = -H^T(t)Q(t)H(t)p_2(t), \quad 0 < t < s, \quad z_2(0) = 0,$$

$$L_1 z_3(t) = -H^T(t)Q(t)H(t)p_3(t), \quad s < t < T, \quad z_2(s) - z_3(s) = a, \quad z_3(T) = 0,$$

$$L_1 p_2(t) = Q_2^{-1}(t)z_2(t), \quad 0 < t < s, \quad p_2(0) = Q_0^{-1}z_2(0),$$

$$L_1 p_3(t) = Q_2^{-1}(t)z_3(t), \quad s < t < T, \quad p_2(s) = p_3(s), \quad p_3(T) = -Q_1^{-1}z_3(T),$$

$$L_1 \hat{p}_2(t) = H^T(t)Q(t)(y(t) - H(t)\hat{\varphi}_2(t)), \quad 0 < t < s, \quad \hat{p}_2(0) = 0,$$

$$L_1 \hat{p}_3(t) = H^T(t)Q(t)(y(t) - H(t)\hat{\varphi}_3(t)), \quad s < t < T,$$

$$\hat{p}_3(s) = \hat{p}_2(s), \quad \hat{p}_3(T) = 0,$$

$$L_1 \hat{\varphi}_2(t) = Q_2^{-1}(t)\hat{p}_2(t), \quad 0 < t < s, \quad \hat{\varphi}_2(0) = Q_0^{-1}\hat{p}_2(0),$$

$$L_1 \hat{\varphi}_3(t) = Q_2^{-1}(t)\hat{p}_3(t), \quad s < t < T, \quad \hat{\varphi}_3(s) = \hat{\varphi}_2(s), \quad \hat{\varphi}_3(T) = -Q_1^{-1}\hat{p}_3(T).$$

7 Метод прогонки в задачах минимаксного оценивания

Предположим, что на промежутке $(0, 1)$ наблюдаются вектор-функции

$$y_1(t) = C_{11}\varphi(t) + C_{12}\varphi'(t) + \xi_1(t), \quad y_2(t) = C_{21}\varphi(t) + C_{22}\varphi'(t) + \xi_2(t), \tag{7.1}$$

где $C = C_{ij}(t)$ – матрицы размерности $m \times n$ с непрерывными на $[0, 1]$ элементами, $\xi_i(t)$– непрерывные в среднеквадратическом векторные случайные процессы, $M\xi_i(t) = 0$, $i = 1, 2$, функция $\varphi(t)$ – решение краевой задачи

$$\varphi''(t) = A(t)\varphi(t) + B(t)f(t), \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0, \tag{7.2}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ матрицы размерности $n \times n$ и $n \times r$ с непрерывными на отрезке $[0, 1]$ элементами, причем $A(t)$ – симметричная неотрицательно определенная, а $f(t)$ интегрируемая с квадратом на $(0, 1)$ вектор-функция.

Положим $\varphi = \varphi_1$, $\varphi_1' = \varphi_2$. Тогда (7.2) мы можем записать в виде системы уравнений

$$\varphi_1' = \varphi_2, \quad \varphi_2' = A(t)\varphi_1 + B(t)f, \quad \varphi_2(0) = \varphi_1(1) = 0. \tag{7.3}$$

Сведем решение краевой задачи (7.3) к решению задач Коши с помощью метода прогонки.

Будем искать функцию $\varphi_2(t)$ в виде $\varphi_2(t) = P(t)\varphi_1(t) + \psi(t)$, где матрицу $P(t)$ и вектор-функцию $\psi(t)$ подберем так, чтобы выполнялось условие

$$\varphi_2'(t) = A(t)\varphi_1(t) + B(t)f(t).$$

Так как

$$\varphi_2'(t) = P'(t)\varphi_1(t) + P(t)\varphi_1'(t) + \psi'(t) = P'(t)\varphi_1(t) + P(t)\varphi_2(t) + \psi'(t) =$$

$$= P'(t)\varphi_1(t) + P(t)[P(t)\varphi_1(t) + \psi(t)] + \psi'(t) = A(t)\varphi_1(t) + B(t)f(t),$$

то функции $P(t)$ и $\psi(t)$ должны быть решениями следующих уравнений

$$P'(t) + P^2(t) = A(t),\ P(0) = 0,\ \psi'(t) + P(t)\psi(t) = B(t)f(t),\ \psi(0) = 0. \qquad (7.4)$$

Таким образом, краевую задачу (7.2) мы свели к решению задач Коши для функций $P(t)$, $\psi(t)$, $\varphi_1(t)$.

Заметим, что для функции $P(t)$ мы получили уравнение Риккати, которое имеет единственное решение на любом конечном отрезке и, кроме того, существует единственная функция $\psi(t)$, которая является абсолютно непрерывной и почти всюду удовлетворяет соответствующему уравнению.

Учитывая наши обозначения мы можем записать выражения для функций $y_1(t), y_2(t)$ в виде

$$\begin{aligned} y_1(t) &= [C_{11}(t) + C_{12}(t)P(t)]\varphi_1(t) + C_{12}(t)\psi(t) + \xi_1(t), \\ y_2(t) &= [C_{21}(t) + C_{22}(t)P(t)]\varphi_1(t) + C_{22}(t)\psi(t) + \xi_2(t) \end{aligned}$$

или

$$y(t) = H(t)x(t) + \xi(t), \qquad (7.5)$$

где

$$H(t) = (H_{ij}(t))_{i,j=1,2}, \quad H_{11} = C_{11} + C_{12}P,$$
$$H_{12} = C_{12}, \quad H_{21} = C_{21} + C_{22}P, \quad H_{22} = C_{22},$$
$$x(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix},$$

причем функция $x(t)$ – решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A_1(t)x(t) + B_1(t)f(t), \quad \varphi_1(1) = 0, \quad \psi(0) = 0, \qquad (7.6)$$

где

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} P(t) & E \\ 0 & -P(t) \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

Предположим далее, что корреляционная матрица процесса $\xi(t)$ принадлежит области

$$V = \left\{ R: \int_0^1 q_1^2(t) Sp\, R(t,t)dt \le 1 \right\}, \tag{7.7}$$

где $q_1(t)$ – непрерывная функция на $[0,T]$, причем $|q_1(t)| \ge \mathrm{q} > 0$, q – некоторое число, $R(t,t) = M\xi(t)\xi^T(t)$. Предположим также, что функция $f(t)$ принадлежит области G вида

$$G = \left\{ f: \int_0^1 (Qf,f)dt \le 1 \right\}, \tag{7.8}$$

где Q – положительно-определенная матрица.

Наша задача состоит в том, чтобы по наблюдениям (7.1) найти минимаксную оценку выражения $(a_1, \varphi_1(s)) + (a_2, \varphi_2(s))$, но поскольку $(a_1,\varphi_1) + (a_2,\varphi_2) = (a_1 + Pa_2, \varphi_1) + (a_2, \psi) = (b, x(s))$, то есть взаимно однозначное соответствие между оценками.

Оценку выражения $(b, x(s))$ мы будем искать в классе линейных по наблюдениям оценок вида

$$\widehat{(b,x(s))} = \int_0^s (u_1(t), y(t))dt + \int_s^1 (u_2(t), y(t))dt + d, \tag{7.9}$$

где $u_1(t), u_2(t)$ – функции интегрируемые с квадратом на интервалах $(0,s)$ и (s,T) соответственно, $d \in \mathbb{R}^1$.

Как и ранее минимаксную оценку будем искать из условия

$$\inf_{u,d} \sup_{V,G} M[(b,x(s)) - \widehat{(b,x(s))}]^2 = \sup_{V,G} M[(b,x(s)) - \widehat{\widehat{(b,x(s))}}]^2. \tag{7.10}$$

Введем функции $z_1(s), z_2(s)$ как решения уравнений

$$\begin{gathered} z_1' = -A_1^T z_1 + H^T u_1, \quad z_{11}(0) = 0, \quad 0 < t < s, \\ z_2' = -A_1^T z_2 + H^T u_2, \quad z_{22}(1) = 0, \quad s < t < 1, \\ -z_2(s) + z_1(s) = b. \end{gathered} \tag{7.11}$$

Лемма 2. *Пусть $z_1(s)$ и $z_2(s)$ – решение краевой задачи для уравнений (7.11), тогда имеет место равенство*

$$\sup_{V,G} M[(b,x(s)) - \widehat{(b,x(s))}]^2 = \int_0^s (Q_1 z_1, z_1)dt + \int_s^1 (Q_1 z_2, z_2)dt +$$

$$+\int\limits_0^s q_1^{-2}(u_1,u_1)dt+\int\limits_s^1 q_1(u_2,u_2)dt+d^2, \tag{7.12}$$

где

$$Q_1=B_1Q^{-1}B_1^T.$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству соответствующего утверждения из § 4.

Замечание. Краевая задача имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных функций.

Действительно, если мы запишем уравнения для компонент векторов z_1 и z_2, то получим систему уравнений:

$$z'_{11}=-Pz_{11}+(H^Tu_1)_1,\quad z_{11}(0)=0,$$

$$z'_{12}=-z_{11}+Pz_{12}+(H^Tu_1)_1,\quad -z_{21}(s)+z_{11}(s)=b_1, \tag{7.13}$$

$$z'_{21}=-Pz_{21}+(H^Tu_2)_1,\quad -z_{22}(s)+z_{12}(s)=b_2,$$

$$z'_{22}=-z_{21}+Pz_{22}(H^Tu_2)_2,\quad z_{22}(1)=0.$$

Для функции z_{11} мы имеем задачу Коши, решая которую находим $z_{21}(s)$ и, следовательно $z_{22}(s)$, и решая задачу Коши для $z_{21}(t)$, получим эту функцию для всякого $t\in(s,1)$. Затем аналогично поступаем, чтобы найти функцию $z_{12}(t)$.

Теорема 7. *Пусть функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ имеют вид $u_1(t)=p_1(t)H(t)z_1(t)$, $u_2(t)=p_2(t)H(t)z_2(t)$, где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ – функции непрерывные соответственно на $[0,s]$ и $[s,1]$. Тогда имеет место представление*

$$\int\limits_0^s(u_1(t),y(t))dt+\int\limits_s^1(u_2(t),y(t))dt=(b,\hat{x}_1(s)), \tag{7.14}$$

где $\hat{x}_1(s)$ определяется из решения систем уравнений

$$\hat{x}'_1(t)=A_1\hat{x}_1+p_1(t)H^T(y(t)-H\hat{x}_1(t)),$$

$$\hat{x}'_2(t)=A_1\hat{x}_2+p_2(t)H^T(y(t)-H\hat{x}_2(t)), \tag{7.15}$$

$$\hat{x}_1(s)=\hat{x}_2(s),\quad \hat{x}_{12}(0)=\hat{x}_{21}(1)=0.$$

Доказательство. Так как $u_2(t)=p_2(t)H(t)z_2(t)$, то

$$\int\limits_s^1(u_2(t),y(t))dt=\int\limits_s^1(z_2(t),p_2(t)H^T(t)y(t))dt.$$

Пусть $\hat{x}_2(s)$ – решение, которое определяется из уравнений (7.15). Умножая правую и левую часть второго из уравнений системы (7.15) на $z_2(t)$ и интегрируя результат в пределах от s до 1, получаем

$$\int_s^1 (z_2, p_2 H^T y)dt = \int_s^1 (\hat{x}_2', z_2)dt - \int_s^1 (A_1\hat{x}_2, z_2)dt + \int_s^1 (p_2 H^T H\hat{x}_2, z_2)dt,$$

но

$$\int_s^1 (\hat{x}_2', z_2)dt = -\int_s^1 (\hat{x}_2, z_2')dt + (\hat{x}_2(1), z_2(1)) - (\hat{x}_2(s), z_2(s)) =$$

$$= \int_s^1 (\hat{x}_2, A_1^T z_2)dt - \int_s^1 (\hat{x}_2, p_2 H^T H z_2)dt.$$

Таким образом

$$\int_s^1 (z_2, p_2 H^T y)dt = -(\hat{x}_2(s), z_2(s)).$$

Аналогично

$$\int_0^s (u_1, y)dt = \int_0^s (z_1, p_1 H^T y)dt = (\hat{x}_1(s), z_1(s)).$$

Откуда, учитывая равенства $\hat{x}_1(s) = \hat{x}_2(s)$, $z_1(s) - z_2(s) = b$, получим необходимое равенство. $\square$

Введем функции $p_1(t), p_2(t), \hat{x}_1(t), \hat{x}_1(t)$ как решения уравнений

$$z_1' = -A_1^T z_1 + H^T q_1^2 H p_1, \quad z_{11}(0) = 0,$$
$$z_2' = -A_1^T z_2 + H^T q_1^2 H p_2, \quad z_{22}(1) = 0,$$
$$z_1(s) - z_2(s) = b, \tag{7.16}$$
$$p_1' = A_1 p_1 + Q_1 z_1, \quad p_{12}(0) = 0,$$
$$p_2' = A_1 p_2 + Q_1 z_2, \quad p_{21}(1) = 0,$$
$$p_1(s) = p_2(s),$$
$$\hat{x}_1' = A_1\hat{x}_1 + Q_1\hat{p}_1, \quad \hat{x}_{12}(0) = 0,$$
$$\hat{x}_2' = A_1\hat{x}_2 + Q_1\hat{p}_2, \quad \hat{x}_{21}(1) = 0,$$
$$\hat{x}_1(s) = \hat{x}_2(s), \tag{7.17}$$
$$-\hat{p}_1' = A_1^T\hat{p}_1 + H^T q_1^2(y - H\hat{x}_1), \quad \hat{p}_{11}(0) = 0,$$

$$-\hat{p}_2' = A_1^T\hat{p}_2 + H^T q_1^2(y - H\hat{x}_2), \quad \hat{p}_{22}(1) = 0,$$
$$\hat{p}_1(s) = \hat{p}_2(s).$$

Тогда имеет место

Теорема 8. *Пусть множество G имеет вид (7.8). Тогда для минимаксной оценки имеет место представление*

$$\widehat{(\widehat{b, x(s)})} = \int\limits_0^s (q_1^2 H p_1, y)dt + \int\limits_s^1 (q_1^2 H p_2, y)dt = (b, \hat{x}_1(s)), \tag{7.18}$$

где функции $p_1, p_2, \hat{x}_1$ – определяются из решений систем уравнений (7.16),(7.17).

Доказательство этого предложения аналогично доказательству соответствующего утверждения из § 2.1.

Запишем далее уравнения (7.17) в развернутом виде

$$\hat{x}_{11}' = P\hat{x}_{11} + \hat{x}_{11}, \quad \hat{x}_{12}(0) = 0,$$
$$\hat{x}_{12}' = -P\hat{x}_{12} + \tilde{Q}\hat{p}_{12}, \quad \hat{x}_{21}(1) = 0,$$
$$\hat{x}_{21}' = P\hat{x}_{21} + \hat{x}_{22}, \quad \hat{x}_{11}(s) = \hat{x}_{21}(s),$$
$$\hat{x}_{22}' = -P\hat{x}_{22} + \tilde{Q}\hat{p}_{22}, \quad \hat{x}_{12}(s) = \hat{x}_{22}(s),$$

где $\tilde{Q} = BQ_1B^T$. Вернемся снова к уравнению (7.6). Поскольку уравнение для функции $\psi(t)$ имеет вид:

$$\psi'(t) = -P(t)\psi(t) + B(t)f(t), \quad \psi(0) = 0,$$

то согласно формуле Коши получим

$$\psi(1) = \int\limits_0^1 G(1,t)B(t)f(t)dt = \mathcal{D}f,$$

где $G(s,t)$ – решение уравнения

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial s} = P(s)G(s,t),$$
$$G(t,t) = E.$$

Будем далее изучать оценки решений уравнения (7.6) с условиями $\varphi_1(1) = 0$, $\psi(1) = \mathcal{D}f$. Пусть функция $f(t)$ принадлежит ограниченному в $L_2(0,1)$ множеству G.

Введем функции $z_1(t), z_2(t)$ как решения уравнений

$$z_1' = -A_1^T z_1 + H^T u_1, \quad z_1(0) = 0,$$

$$z_2' = -A_1^T z_2 + H^T u_2, \quad z_1(s) - z_2(s) = b. \tag{7.19}$$

Имеет место

Теорема 9. *Пусть $z_1(t), z_2(t)$ – решение системы уравнений (7.19). Тогда*

$$\sup_{G,\mathcal{R}} M((b, x(s)) - (\widehat{b, x(s)}))^2 = \sup_G \Bigg(\int_0^s \big(z_1(t) + G^T(1,t)z_2(1), B(t)f(t)\big)\, dt +$$

$$+ \int_s^1 \big(z_2(t) + G^T(1,t)z_2(1), B(t)f(t)\big)\, dt + \int_0^s q_1^{-2}(t)(u_1(t), u_1(t))dt +$$

$$+ \int_0^s q_1^{-2}(t)(u_2(t), u_2(t))dt - d\Bigg)^2.$$

Доказательство этого предложения легко провести используя методы, предложенные в § 2.1.

Назовем минимаксную оценку $(\widehat{\widehat{b, x(s)}})$ $\mathcal{U}$ - оптимальной, если она имеет вид:

$$(\widehat{\widehat{b, x(s)}}) = \int_0^s (\hat{u}_1(t), y(t))\, dt + \int_s^1 (\hat{u}_2(t), y(t))\, dt + \hat{d},$$

где функции $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ и число $\hat{d}$ находятся из условия

$$\inf_{(u_1,u_2)\in\mathcal{U},d} \sup_{G,V} M\left((b, x(s)) - (\widehat{b, x(s)})\right)^2 = \sup_{G,V} M\left((b, x(s)) - (\widehat{\widehat{b, x(s)}})\right)^2$$

а $\mathcal{U}$ – некоторое множество из пространства $L_2(0,1)$.

Пусть множество $\mathcal{U}$ имеет вид $\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : z_2(1) = 0\}$, а G задано согласно формуле (7.8).

Теорема 10. *Предположим, что множество $\mathcal{U}$ не пусто. Тогда $\hat{d} = 0$, $\hat{u}_1(t) = q_1(t)H(t)p_1(t)$, $\hat{u}_2(t) = q_1(t)H(t)p_2(t)$, где $p_1(t), p_2(t)$ определяются из решения систем уравнений*

$$z_1' = -A_1^T z_1 + H^T\hat{u}_1, \quad z_1(0) = 0,$$
$$z_2' = -A_1^T z_2 + H^T\hat{u}_2, \quad z_1(s) - z_2(s) = b, \quad z_2(1) = 0,$$
$$p_1' = A_1p_1 + Q_1z_1, \quad 0 < t < s,$$
$$p_2' = A_1p_2 + Q_1z_2, \quad s < t < 1, \quad p_1(s) = p_2(s).$$

Доказательство. Если множество U не пусто, то из предложения 4 следует, что при $(u_1, u_2) \in U$ получим, что

$$\sup_{G,R} M((b, x(s)) - (\widehat{b, x(s)}))^2 =$$

$$\sup_G \left[\int_0^s (z_1(t), B(t)f(t))dt + \int_s^1 (z_2(t), B(t)f(t))dt - d\right]^2 +$$

$$+ \int_0^s q_1^{-2}(t)(u_1(t), u_1(t))dt + \int_0^s q_1^{-2}(t)(u_2(t), u_2(t))dt = J(u, d).$$

Учитывая вид множества G далее получим, что

$$J(u,d)=\int_0^s (Q_1z_1,z_1)dt+\int_s^1 (Q_1z_2,z_2)dt+$$
$$+\int_0^s q_1^{-2}(t)(u_1(t),u_1(t))dt+\int_s^1 q_1^{-2}(t)(u_2(t),u_2(t))dt+d^2.$$

Из этого выражения следует, что

$$\inf_{(u_1,u_2)\in U,d} J(u,d)=\inf_{(u_1,u_2)\in U} J(u,0).$$

Решая задачу на условный экстремум для функционала $J(u,0)$ получим для векторов на которых достигается точная нижняя грань, что

$$\hat{u}_1(t)=q_1(t)H(t)p_1(t),\quad \hat{u}_2(t)=q_1(t)H(t)p_2(t).$$

Теорема доказана. □

Введем функции $\hat{p}_1(t)$, $\hat{p}_2(t)$, $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$ как решения системы уравнений

$$-\hat{p}_1'=A_1^T\hat{p}_1+q_1H^T(y(t)-H\hat{x}_1(t)),\quad \hat{p}_1(0)=0,$$
$$-\hat{p}_2'=A_1^T\hat{p}_2+q_1H^T(y(t)-H\hat{x}_2(t)),\quad \hat{p}_2(1)=0,\quad \hat{p}_1(s)=\hat{p}_2(s),$$
$$\hat{x}_1'=A_1\hat{x}_1+Q_1\hat{p}_1,\quad 0<t<s,$$
$$\hat{x}_2'=A_1\hat{x}_2+Q_1\hat{p}_2,\quad s<t<1,\quad \hat{x}_1(s)=\hat{x}_2(s).$$

Теорема 11. *Для минимаксной оценки справедливо представление* $\widehat{\widehat{(b,x(s))}}=(b,\hat{x}_1(s))$.

Доказательство. Так как $\hat{u}_1(s)=q_1(t)H(t)p_1(t)$, то

$$\int\limits_0^s(\hat{u}_1,y)dt=\int\limits_0^s(q_1Hp_1,y)dt=\int\limits_0^s(p_1,q_1H^Ty)dt=$$

$$=-\int\limits_0^s(p_1,\hat{p}_1')dt-\int\limits_0^s(p_1,A_1^T\hat{p}_1)dt+\int\limits_0^s(p_1,q_1H^TH\hat{x}_1)dt=$$

$$=\int\limits_0^s(p_1',\hat{p}_1)dt-\int\limits_0^s(A_1^Tp_1,\hat{p}_1)dt-(p_1(s),\hat{p}_1(s))+\int\limits_0^s(p_1,q_1H^TH\hat{x}_1)dt=$$

$$=\int\limits_0^s(z_1,Q_1\hat{p}_1)dt-(p_1(s),\hat{p}_1(s))+\int(p_1,q_1H^TH\hat{x}_1)dt,$$

$$\int_0^s (z_1, Q_1\hat{p}_1)dt = \int_0^s (\hat{x}_1' - A_1\hat{x}_1, z_1)dt =$$

$$= -\int_0^s (\hat{x}_1, z_1' + A_1^T z_1)dt + (\hat{x}_1(s), z_1(s)) - \int_0^s (p_1, q_1 H^T H\hat{x}_1)dt.$$

Откуда получим $\int_0^s (\hat{u}_1, y)dt = (\hat{x}_1(s), z_1(s))$.

Аналогично,

$$\int_s^1 (\hat{u}_2, y)dt = -(\hat{x}_2(s), z_2(s)) = -(\hat{x}_1(s), z_2(s)).$$

Значит,

$$\int_0^s (\hat{u}_1, y)dt + \int_s^1 (\hat{u}_2, y)dt = (b, \hat{x}_1(s)),$$

что и требовалось показать. □

8 Дополнение

Приведем формулировку теоремы 1.1 из [3]. Пусть $\mathcal{U}$ – гильбертово пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ с нормой $||\cdot||$.

Предположим, что нам заданы:

(i) билинейная непрерывная на $\mathcal{U}$ симметричная форма

$$u, v \to \pi(u, v); \quad \pi(u, v) = \pi(v, u) \quad \forall u, v \in \mathcal{U}; \quad |\pi(u, v)| \le c_1||u||||v||, \quad c_1 = \text{const} > 0;$$

(ii) линейная непрерывная на $\mathcal{U}$ форма

$$v \to L(u); \quad |L(v)| \le c_2||u||, \quad c_2 = \text{const} > 0$$

и рассматривается квадратичный функционал

$$J(u, u) = \pi(u, u) + 2L(u), \tag{8.1}$$

который требуется минимизировать на пространстве $\mathcal{U}$.

Определение. Говорят, что форма $\pi(u, v)$ коэрцитивна на $\mathcal{U}$, если

$$\pi(u, v) \ge c|||v||, \quad c = \text{const} > 0. \tag{8.2}$$

Теорема 1. 1. *Если $\pi(u, v)$ – билинейная непрерывная на $\mathcal{U}$ симметричная форма, удовлетворяющая условию (8.2), то существует и притом единственный элемент $\hat{u} \in \mathcal{U}$, для которого*

$$J(\hat{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(u).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М. Мир, 1968. – 749 с.

[2] *Королюк В.С. и др.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М. Наука, 1989. – 640 с.

[3] *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными: Пер. с фран. - М.: Мир, 1972. - 414 с.

[4] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М. Наука, 1969. – 526 с.

[5] *Наконечный А.Г.* Минимаксные оценки в системах с распределенными параметрами. – Препринт №79, 1979. 55 с.

[6] *Хатсон В, Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.:Мир, 1983. – 431 с.

[7] *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры – М. 'Наука', 1971.

[8] *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1985