§ 11. ГРУППЫ С ОПЕРАТОРАМИ. МОДУЛИ

Существует, помимо перечисленных выше, много других типов универсальных алгебр, для которых можно было бы привести столь же убедительные аргументы, оправдывающие их введение и изучение. Мы вынуждены ограничиться кратким перечнем некоторых из них — далеко не всех, не сопровождая этот перечень до некоторого времени сколько-нибудь глубокими теоремами, хотя среди этих типов алгебр будут и такие, которые уже сейчас принадлежат к важнейшим объектам изучения в общей алгебре (например, модули, линейные алгебры и структуры), а также такие, которые должны будут занять центральное положение в алгебре в обозримом будущем.

Еще на заре развития общей теории групп стали изучать *группы с операторами*, т. е. группы, в которых задана некоторая система Σ унарных операций, дистрибутивных относительно группового умножения. Иными словами, группа G называется *Σ-операторной*, а элементы из Σ — *операторами* для G, если для любых $a, b \in G$ и $\alpha \in \Sigma$

$$(ab)\alpha = a\alpha \cdot b\alpha. \tag{1}$$

Всякий элемент $\alpha \in \Sigma$ действует, следовательно, как эндоморфизм группы G. причем различные элементы из Σ могут действовать в G как один и тот же эндоморфизм.

Все группы с данной системой операторов Σ составляют, очевидно, многообразие универсальных алгебр: сигнатура состоит из групповых операций и Σ, а система тождеств — из соответствующих групповых тождеств и тождеств вида (1) для всех $\alpha \in \Sigma$. Заметим, что подалгебры Σ-операторной группы называются *Σ-допустимыми подгруппами*, а гомоморфизмы Σ-операторных групп (с фиксированной, понятно, системой операторов Σ) — *Σ-операторными гомоморфизмами*.

Понятие группы с операторами подсказано следующими примерами. Всякая группа G будет Σ-операторной относительно любой системы Σ своих эндоморфизмов. От этого частного случая понятие произвольной операторной группы отличается лишь тем, что в общем случае, как уже отмечено выше, различные операторы могут действовать как один и тот же эндоморфизм группы. Если в качестве Σ мы возьмем множество всех эндоморфизмов группы G, то Σ-допустимые подгруппы называются в теории групп *вполне характеристическими*. Если Σ будет множеством всех автоморфизмов группы G, то Σ-допустимые подгруппы называются *характеристическими*. Если же в качестве Σ рассмотреть множество всех внутренних автоморфизмов группы G, т. е. трансформирований группы G произвольными ее элементами (если фиксировано $a \in G$, то преобразование $x \to a^{-1}xa$, $x \in G$, является, очевидно, автоморфизмом группы G), то Σ-допустимы нормальные делители группы G и только они.

С другой стороны, если в произвольном кольце R фиксирован элемент a, то правое умножение на a, т. е. преобразование $x \to xa$, $x \in R$, будет эндоморфизмом аддитивной группы кольца R, как вытекает из закона дистрибутивности. Если взять в R всевозможные правые умножения, то можно считать аддитивную группу кольца R операторной группой с самим множеством R в качестве системы операторов. Допустимыми будут при этом правые идеалы кольца R, т. е. подгруппы аддитивной группы, выдерживающие умножение справа на любой элемент кольца. Мы получили пример операторной группы, в которой различные операторы могут действовать как один и тот же эндоморфизм группы. Взяв в кольце R левые умножения, мы приходим к еще одной возможности рассматривать аддитивную группу кольца как R-операторную; допустимыми подгруппами будут при этом левые идеалы кольца. Наконец, объединяя эти две системы операторов, мы придем к такой системе операторов для аддитивной группы кольца R, что допустимыми подгруппами будут двусторонние идеалы этого кольца и только они.

Отметим, что теория групп без операторов является частью теории операторных групп — достаточно взять систему операторов пустой или же состоящей из одного тождественного автоморфизма.

Изучение групп с произвольной системой операторов равносильно изучению *групп с полугруппой операторов*: система операторов является полугруппой Π относительно умножения $\alpha\beta$, причем для любого элемента a рассматриваемой группы и любых операторов $\alpha,\ \beta \in \Pi$ должно выполняться равенство

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta. \tag{2}$$

В самом деле, пусть дана группа G с произвольной системой операторов Σ. Построим полугруппу Π, элементами которой служат всевозможные слова вида $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Sigma$, $n \geqslant 1$, а умножение слов определяется равенством

$$(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)(\beta_1\beta_2\ldots\beta_s) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta_1\beta_2\ldots\beta_s; \tag{3}$$

ассоциативность этого умножения очевидна. Отметим, что Π есть свободная полугруппа с множеством Σ свободных образующих (ср. § 1). Сопоставляя каждому слову $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \in \Pi$ эндоморфизм группы G, являющийся произведением эндоморфизмов, соответствующих операторам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Sigma$, мы превращаем G в Π-операторную группу. Π служит для G даже полугруппой операторов, так как справедливость требования (2) вытекает из (3) и ассоциативности умножения эндоморфизмов. Ясно также, что Σ-допустимые подгруппы остаются и Π-допустимыми, а Σ-операторные гомоморфизмы будут и Π-операторными.

Условие (2) показывает, что, сопоставляя каждому элементу полугруппы операторов Π соответствующий ему эндоморфизм группы G, мы получаем гомоморфное отображение полугруппы Π в полугруппу эндоморфизмов группы G.

К полугруппе операторов Π всегда можно присоединить единицу ε, действующую как тождественный автоморфизм основной группы G; условие (2) не будет при этом нарушено. Если полугруппа операторов, обладающая единицей, действует на группе G так, что единица является тождественным оператором, то будем говорить, что она действует *унитарно*.

Частным случаем этого является понятие *группы с группой операторов.* Если дана группа G с унитарно действующей группой операторов Γ, то всякий элемент из Γ действует как автоморфизм группы G, т. е. группа Γ гомоморфно отображена в группу автоморфизмов группы G, или, как говорят, *представлена* автоморфизмами группы G. Изучению представлений групп автоморфизмами посвящена книга Б. И. Плоткина «Группы автоморфизмов алгебраических систем», М., «Наука», 1966.

Теорию групп с группой операторов можно рассматривать впрочем, как часть теории групп без операторов. Именно, группа H называется *полупрямым произведением* своих подгрупп A и B, причем B должно быть нормальным делителем в H, если всякий элемент $h \in H$ однозначно записывается в виде $h = ab$, $a \in A$, $b \in B$. Трансформирования элементами из A индуцируют в B автоморфизмы, произведению элементов из A соответствует произведение соответствующих автоморфизмов, а поэтому B будет группой с группой операторов A.

Обратно, если дана группа G с группой операторов Γ и если φ будет соответствующим гомоморфизмом группы Γ в группу автоморфизмов группы G, то множество H пар вида αa, $\alpha \in \Gamma$, $a \in G$, превращается в группу, если умножение пар определить по правилу

$$\alpha a - \beta b = (\alpha\beta)(a^{\beta} b),$$

где $a^{\beta} = a(\beta\varphi)$ (т. е. образ элемента a при операторе β или, что то же самое, при автоморфизме $\beta\varphi$, соответствующем оператору β). Легко проверяется ассоциативность этого умножения; роль единицы играет пара εe, где ε и e — соответственно единицы групп Γ и G; обратным для элемента αa служит элемент $\alpha^{-1}(a^{-1})^{\alpha^{-1}}$. Так же просто проверяется, что элементы вида αe, $\alpha \in \Gamma$, составляют в H подгруппу Γ', изоморфную Γ, а элементы вида εa, $a \in G$,— нормальный делитель G', изоморфный G, и что группа H будет их полупрямым произведением, а автоморфизм, индуцированный в G' трансформированием элементом $\alpha e \in \Gamma'$, соответствует при изоморфизме между G и G' автоморфизму $\alpha\varphi$ группы G.

Впрочем, переход от полупрямых произведений групп к группам с группой операторов (а также к представлениям групп автоморфизмами других групп) открыл для развития теории такие возможности, которые без этого не могли бы возникнуть. Отметим хотя бы, что класс всех операторных групп с фиксированной группой операторов Γ является многообразием: к тождествам, определяющим многообразие групп с системой операторов Γ, нужно добавить всевозможные тождества вида

$$(x\alpha)\beta = x\gamma,$$

если в группе Γ для элементов α, β, γ выполняется равенство $\alpha\beta = \gamma$. Это же утверждение справедливо, понятно, и для класса групп с фиксированной полугруппой операторов.

Вернемся к произвольной системе операторов, но ограничимся теперь рассмотрением абелевых групп. Изучение абелевой группы с произвольной системой операторов равносильно изучению этой группы как операторной с ассоциативным кольцом операторов. При этом, если G — абелева группа, записанная аддитивно, а R — ассоциативное кольцо, то G называется *абелевой группой с кольцом операторов* R или (*правым*) *модулем над кольцом* R, или же, короче, R-*модулем*, если G является R-операторной группой, т. е. для любых $a, b \in G$ и $\alpha \in R$ имеет место равенство (1), записываемое теперь в виде

$$(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \tag{4}$$

и если, кроме того, для любых $a \in G$ и $\alpha, \beta \in R$ выполняются равенства

$$a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta, \tag{5}$$

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta, \tag{6}$$

из которых последнее совпадает с (2).

Как показывает определение кольца эндоморфизмов абелевой группы, *всякая абелева группа будет модулем* *над любым подкольцом своего кольца эндоморфизмов.* С другой стороны, если задан R-модуль G, то, ввиду (5) и (6), этим задан гомоморфизм кольца R в кольцо эндоморфизмов аддитивной группы G. Отметим также, что, рассматривая выше аддитивную группу кольца R как R-операторную, используя правые умножения, мы на самом деле в случае ассоциативного кольца R превратили эту группу в R-модуль, так как справедливость условий (5) и (6) вытекает здесь из свойств ассоциативного кольца.

Если кольцо R обладает единицей ε, то R-модуль G называется *унитарным* в том случае, если ε действует в G как тождественный оператор,

$$a\varepsilon = a, \quad a \in G, \tag{7}$$

т. е. если группа G имеет мультипликативную полугруппу кольца R унитарной полугруппой операторов.

Изучение абелевых групп с произвольной системой операторов равносильно изучению унитарных модулей. В самом деле, если дана абелева группа G с системой операторов Σ, то описанным выше способом можно перейти к полугруппе операторов Π. Обозначим через R целочисленное полугрупповое кольцо полугруппы Π (см. § 9) и для любого $a \in G$ и любого элемента

$$\rho = \sum_{\alpha \in \Pi}' k_\alpha \alpha, \quad \rho \in R,$$

(ср. § 9) положим

$$a\rho = \sum_{\alpha \in \Pi}' k_\alpha (a\alpha).$$

Без затруднений проверяется, что группа G превращается этим в R-модуль. Вложим, наконец, кольцо R в кольцо с единицей $\bar{R}$ способом, указанным в § 9, и для любого $a \in G$ и любого элемента $(\rho, k) \in \bar{R}$ (ср. § 9) положим

$$a(\rho, k) = a\rho + ka.$$

Группа G превращается этим в унитарный $\bar{R}$-модуль, причем ее Σ-допустимые подгруппы остаются и $\bar{R}$-допустимыми, т. е. будут подмодулями $\bar{R}$-модуля G, а Σ-операторные гомоморфизмы будут и $\bar{R}$-операторными.

На основании таких же соображений, какие использовались выше в случае полугруппы или группы операторов, устанавливается, что *все R-модули над фиксированным кольцом R (а также все унитарные R-модули над кольцом R с единицей) составляют многообразие.*

Отметим, что *всякая абелева группа G является унитарным модулем над кольцом целых чисел*,— если k — любое целое число, то его действие как оператора состоит в том, что всякий элемент $a \in G$ переходит в свое k-кратное ka.

Унитарные модули над ассоциативным (не обязательно коммутативным) телом K называются (*правыми*) *векторными пространствами* над K; если K — поле, то добавлять «правыми» понятно, нет необходимости. Многообразие векторных пространств над телом K является одним из немногих примеров многообразий, все алгебры которых могут быть полностью описаны. Именно, всякое векторное пространство над K обладает *базами*, т. е. максимальными линейно независимыми подмножествами, причем все его базы имеют одну и ту же мощность; она называется *размерностью* пространства. С другой стороны, для всякой мощности $\mathfrak{m}$, конечной или бесконечной, над телом K существует векторное пространство размерности $\mathfrak{m}$. Наконец, два векторных пространства над телом K изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же размерность.