§ 14. АБЕЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Перейдем теперь к некоторым другим классам алгебр, обобщающим на этот раз понятие ассоциативного кольца. Это понятие было оправдано в § 9 при помощи колец эндоморфизмов абелевых групп, которые возникли ввиду того, что гомоморфизмы любой группы (на самом деле даже любой алгебры, однотипной с группой) в абелеву группу составляют по сложению гомоморфизмов абелеву группу. Опишем алгебры произвольной сигнатуры, обладающие свойством, аналогичным этому свойству абелевых групп.

Пусть дана алгебра A сигнатуры Ω. Скажем, что гомоморфизмы алгебры G этой же сигнатуры в алгебру A суммируемы, если

а) для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых гомоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$: $G \to A$ отображение $\varphi_1 \ldots \varphi_n \omega$, определяемое равенством

$$g(\varphi_1 \ldots \varphi_n \omega) = (g\varphi_1) \ldots (g\varphi_n)\omega, \quad g \in G, \tag{1}$$

само является гомоморфизмом;

б) для любого $\omega \in \Omega_0$, причем 0_ω — отмечаемый этой операцией элемент алгебры A, отображение φ_ω: $G \to A$, определяемое равенством

$$g\varphi_\omega = 0_\omega, \quad g \in G, \tag{2}$$

является гомоморфизмом.

Алгебра A сигнатуры Ω называется *абелевой* (в различных частных случаях употребляются многие другие названия), если гомоморфизмы в нее любой алгебры этой же сигнатуры суммируемы.

Алгебра A сигнатуры Ω тогда и только тогда абелева, когда

а) *для любых $\omega \in \Omega_n$, $\omega' \in \Omega_s$, $n, s \geqslant 1$, в A выполняется тождество*

$$(x_{11} \ldots x_{1n}\, \omega) \ldots (x_{s1} \ldots x_{sn}\omega)\, \omega' = \\ = (x_{11} \ldots x_{s1}\, \omega') \ldots (x_{1n} \ldots x_{sn}\omega')\, \omega, \tag{3}$$

где $(x_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant n)$ — матрица из неизвестных;

б) *все* $\omega \in \Omega_0$ *отмечают в* A *один и тот же элемент и этот элемент является* Ω*-подалгеброй в* A.

Доказательство. Пусть $\omega \in \Omega_n$, $\omega' \in \Omega_s$, $n, s \geqslant 1$, пусть даны гомоморфизмы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ алгебры G сигнатуры Ω в A и пусть $b_1, \ldots, b_s \in G$. Положим

$$b_i\varphi_j = a_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{4}$$

Матрица (a_{ij}) является на самом деле произвольной матрицей данных размеров из элементов алгебры A — ввиду замечания, сделанного в § 1, достаточно было бы взять в качестве G алгебру Ω-слов над алфавитом $b_1, \ldots, b_s$, а в качестве φ_j гомоморфизм этой алгебры, переводящий указанный алфавит в j-й столбец данной матрицы. Используя (4), (1) и гомоморфность отображений φ_j, получаем:

$$\begin{aligned}(a_{11} \ldots a_{1n}\omega) \ldots (a_{s1} \ldots a_{sn}\,\omega)\omega' &=\\ = [(b_1\varphi_1) \ldots (b_1\varphi_n)\omega] \ldots [(b_s\varphi_1) \ldots (b_s\varphi_n)\omega]\omega' &=\\ = [b_1\,(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)] \ldots [b_s(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)]\omega';&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_{11} \ldots a_{s1}\omega') \ldots (a_{1n} \ldots a_{sn}\omega')\omega &=\\ = [(b_1\varphi_1) \ldots (b_s\varphi_1)\omega'] \ldots [(b_1\varphi_n) \ldots (b_s\varphi_n)\omega']\omega &=\\ = [(b_1 \ldots b_s\omega')\varphi_1] \ldots [(b_1 \ldots b_s\omega')\varphi_n]\omega &=\\ = (b_1 \ldots b_s\omega')(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega).&\end{aligned}$$

Эти равенства показывают, что справедливость в A всех тождеств вида (3) равносильна тому, что всякое отображение вида $\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega$, $n \geqslant 1$, ведет себя как гомоморфизм по отношению ко всем ненульарным операциям $\omega' \in \Omega$.

С другой стороны, из гомоморфности отображения φ_ω из (5), $\omega \in \Omega_0$, следует, в частности, что для любого $\omega' \in \Omega_0$ элемент, отмечаемый этой операцией в G, должен переходить при φ_ω в элемент $0_{\omega'} \in A$, т. е., ввиду (2), все $\omega \in \Omega_0$ действительно отмечают в A один и тот же элемент; обозначим его просто через 0. Из этой же гомоморфности отображения φ_ω, $\omega \in \Omega_0$, следует, что для любой операции $\omega' \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых $a_1, \ldots, a_n \in G$ будет

$$(a_1 \ldots a_n\omega')\,\varphi_\omega = (a_1\varphi_\omega) \ldots (a_n\varphi_\omega)\,\omega',$$

т. е. $0 \ldots 0\omega' = 0$. Обратно, из справедливости условия б) теоремы следует гомоморфность всякого отображения φ_ω, $\omega \in \Omega_0$. Отсюда же следует, наконец, и гомоморфность всякого отображения вида $\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega$, $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, относительно нульарных операций: если операция $\omega' \in \Omega_0$ отмечает в алгебре G элемент $\bar{0}_{\omega'}$, то, по (1),

$$\bar{0}_{\omega'}\,(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega) = (\bar{0}_{\omega'}\varphi_1) \ldots (\bar{0}_{\omega'}\varphi_n)\omega = \\ = 0 \ldots 0\omega = 0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что мы получили бы в точности этот же класс алгебр, если бы в определении абелевой алгебры требовали суммируемость гомоморфизмов в алгебру A лишь для таких алгебр сигнатуры Ω, которые принадлежат к некоторому заданному многообразию, содержащему A. В этом случае нужно было бы только использовать в доказательстве теоремы не алгебру Ω-слов, а соответствующую свободную алгебру этого многообразия.

Если алгебра A сигнатуры Ω абелева, то определения (1) и (2) превращают множество всех гомоморфизмов в A любой алгебры G сигнатуры Ω в алгебру этой же сигнатуры,— (1) задает все операции положительных арностей, а гомоморфизм φ_ω из (2) отмечается нульарной операцией ω; это *алгебра гомоморфизмов* G *в* A. Из определения операций над гомоморфизмами немедленно следует, что *в алгебре гомороpфизмов любой алгебры G в абелеву алгебру A выполняются все тождества, выполняющиеся в A*; в частности, эта алгебра сама будет абелевой.

Из сказанного следует, что эндоморфизмы абелевой алгебры A сигнатуры Ω составляют по указанным операциям абелеву алгебру этой же сигнатуры. С другой стороны, они составляют полугруппу по умножению (в смысле умножения отображений, см. § 3). *Это умножение связано с операциями из Ω законами дистрибутивности.* Именно, если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, то для любого

$a \in A$ и любых эндоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ будет, ввиду (1),

$$a[\psi(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)] = (a\psi)(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega) =$$
$$= [(a\psi)\varphi_1] \ldots [(a\psi)\varphi_n]\omega = [a(\psi\varphi_1)] \ldots [a(\psi\varphi_n)]\omega =$$
$$= a\,[(\psi\varphi_1) \ldots (\psi\varphi_n)\omega],$$

$$a[(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)\psi] = [a(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)]\psi =$$
$$= [(a\varphi_1) \ldots (a\varphi_n)\omega]\psi = [(a\varphi_1)\psi] \ldots [(a\varphi_n)\psi]\omega =$$
$$= [a(\varphi_1\psi)] \ldots [a(\varphi_n\psi)]\omega = a[(\varphi_1\psi) \ldots (\varphi_n\psi)\omega],$$

т. е.

$$\psi(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega) = (\psi\varphi_1) \ldots (\psi\varphi_n)\omega, \tag{5}$$
$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega)\psi = (\varphi_1\psi) \ldots (\varphi_n\psi)\omega. \tag{6}$$

С другой стороны, если мы обозначим теперь через φ_0 нулевой эндоморфизм алгебры A (т. е. эндоморфизм из (2), отображающий A в нуль 0 этой абелевой алгебры), то для любого $a \in A$ и любого эндоморфизма ψ будет

$$a(\psi\varphi_0) = (a\psi)\varphi_0 = 0,$$
$$a(\varphi_0\psi) = (a\varphi_0)\psi = 0\psi = 0,$$

т. е.

$$\psi\varphi_0 = \varphi_0, \tag{7}$$
$$\varphi_0\psi = \varphi_0. \tag{8}$$

Мы пришли к следующему многообразию алгебр: это абелевы алгебры сигнатуры Ω (с нулем 0, если в Ω имеются нульарные операции) и в то же время полугруппы по бинарному умножению, причем выполняются законы дистрибутивности и, в частности, нуль абелевой алгебры играет роль нуля для умножения. В соответствии с терминологией, которая будет введена в следующем параграфе, полученные алгебры можно называть *дистрибутивными кольцоидами над абелевыми алгебрами.*

Рассмотрим некоторые примеры. *В многообразии групп абелевыми алгебрами будут в точности абелевы группы.* Действительно, тождество (3) в группе для случая, когда и ω, и ω' являются умножением, имеет вид

$$(x_{11}x_{12})(x_{21}x_{22}) = (x_{11}x_{21})(x_{12}x_{22}), \tag{9}$$

откуда $x_{12}x_{21} = x_{21}x_{12}$, т. е. умножение коммутативно. Если же одна из операций ω, ω' является умножением, а другая — переходом к обратному элементу, то (3) принимает вид

$$(x_1x_2)^{-1} = x_1^{-1}x_2^{-1},$$

что в абелевой группе действительно выполняется. Наконец, единица группы на самом деле является подгруппой. Дистрибутивные кольцоиды совпадают в этом случае с ассоциативными кольцами.

Для полугрупп с единицей абелевость также совпадает с коммутативностью, как показывает тождество (9) при $x_{11} = x_{12} = 1$. *В многообразии всех полугрупп существуют, однако, некоммутативные, но абелевы полугруппы.* Такова, например, всякая полугруппа с умножением $ab = a$.

Кольцо будет абелевым тогда и только тогда, когда оно с нулевым умножением, т. е. в нем выполняется тождество $xy = 0$. Действительно, тождество (3) для случая, когда ω — сложение, а ω' — умножение, принимает вид

$$(x_{11} + x_{12})(x_{21} + x_{22}) = x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22},$$

откуда при $x_{22} = 0$ получаем $x_{12}x_{21} = 0$. Кольца с нулевым умножением играют в теории колец на самом деле ту же роль, какая в общей теории групп принадлежит абелевым группам.

Рассмотрим, наконец, унитарные модули над ассоциативным кольцом K с единицей. Все требования, содержащиеся в приведенной выше характеризации абелевых алгебр, вытекают в этом случае из определения модуля, кроме одного. Именно, если $\alpha, \beta \in K$, то тождество (3) принимает для случая $\omega = \alpha$, $\omega' = \beta$ вид

$$(x\alpha)\beta = (x\beta)\alpha,$$

т. е.

$$x(\alpha\beta) = x(\beta\alpha). \tag{10}$$

Естественно ограничиться поэтому при рассмотрении модулей, являющихся абелевыми алгебрами, просто модулями над коммутативно-ассоциативным кольцом K.

При этом ограничении на K дистрибутивные кольцоиды над унитарными K-модулями — это в точности ассоциативные линейные алгебры над кольцом K. Действительно, дистрибутивность умножения на первом и на втором месте (условия (5) и (6)) относительно унарной операции $\alpha \in K$, взятой в качестве ω, и есть как раз условие (4) из § 13.