§ 17. ПОЛНЫЕ СТРУКТУРЫ. СООТВЕТСТВИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Многие из структур, в том числе структура подмножеств любого множества и структура подалгебр любой универсальной алгебры, обладают тем свойством, что пересечения и объединения определены в них не только для двух и поэтому, в силу ассоциативности, для любого конечного числа элементов, но и для всех бесконечных подмножеств. Это приводит к следующему понятию.

Частично упорядоченное множество S называется *полной структурой*, если для любого непустого подмножества $A \subseteq S$ в S существуют элементы c и d со следующими свойствами:

I_1'. Для всех $a \in A$ выполняется неравенство $c \leqslant a$, причем если некоторый элемент c' также удовлетворяет условию $c' \leqslant a$ для всех $a \in A$, то $c' \leqslant c$.

I_2'. Для всех $a \in A$ выполняется неравенство $d \geqslant a$, причем если некоторый элемент d' также удовлетворяет условию $d' \geqslant a$ для всех $a \in A$, то $d' \geqslant d$.

Однозначно определенные элементы c и d называются соответственно *пересечением* и *объединением* элементов подмножества A. Записываются они следующим образом: $c = \bigcap A$ (или $c = \bigcap\limits_{a \in A} a$, или $c = \bigcap\limits_{\alpha \in I} a_\alpha$, если a_α, $\alpha \in I$, пробегает все элементы подмножества A); аналогично для d.

Ясно, что полная структура будет и просто структурой.

Бесконечная полная структура не является, однако, универсальной алгеброй в том смысле, как это было определено в § 1. Тем не менее, это понятие играет для нас важную служебную роль и мы сделаем о нем несколько замечаний.

Всякая полная структура S обладает единицей и нулем — это будут соответственно элементы $\bigcup S$ и $\bigcap S$.

Если частично упорядоченное множество S обладает единицей 1 и в нем существуют пересечения для любых непустых подмножеств, то S будет полной структурой.

Нужно доказать лишь, что всякое непустое подмножество $A \subseteq S$ обладает объединением.

Обозначим через B множество всех таких элементов $b \in S$, что $b \geqslant a$ для всех $a \in A$. Множество B — непустое, так как $1 \in B$, а поэтому существует элемент $d = \bigcap B$.

Покажем, что $d = \bigcup A$.

В самом деле, если $a \in A$, то $a \leqslant b$ для всех $b \in B$, а поэтому $a \leqslant d$.

С другой стороны, если элемент $s \in S$ таков, что $s \geqslant a$ для всех $a \in A$, то $s \in B$, а поэтому $d \leqslant s$.

Именно отсюда вытекает, что *структура всех подалгебр любой алгебры G является полной*,— объединением данной системы подалгебр A_α, $\alpha \in I$, является подалгебра, порожденная теоретико-множественным объединением подмножеств A_α, $\alpha \in I$ (см. § 1).

Если даны частично упорядоченные множества S и S', то взаимно однозначное отображение φ множества S на множество S' называется *изоморфизмом*, если для любых $a, b \in S$ условия $a \leqslant b$ и $a\varphi \leqslant b\varphi$ равносильны.

Если φ: $S \to S'$ — изоморфизм полных структур S и S' как частично упорядоченных множеств, то для любого непустого подмножества $A \subseteq S$

$$\Big(\bigcap_{a \in A} a\Big)\varphi = \bigcap_{a \in A} (a\varphi),$$
$$\Big(\bigcup_{a \in A} a\Big)\varphi = \bigcup_{a \in A} (a\varphi).$$

Докажем хотя бы первое из этих утверждений. Если $c = \bigcap\limits_{a \in A} a$, $c' = \bigcap\limits_{a \in A} (a\varphi)$, то из $c \leqslant a$, $a \in A$, следует $c\varphi \leqslant a\varphi$, а поэтому $c\varphi \leqslant c'$.

С другой стороны, $c' \leqslant a\varphi$, $a \in A$, откуда $c'\varphi^{-1} \leqslant a$; поэтому $c'\varphi^{-1} \leqslant c$, откуда $c' \leqslant c\varphi$. Этим доказано, что $c\varphi = c'$.

Эти рассмотрения применимы и к случаю структур, не обязательно полных. Мы получаем, что изоморфизм структур как частично упорядоченных множеств будет их изоморфизмом и как алгебр сигнатуры $(\bigcap, \bigcup)$.

Обратное очевидно, так как $a \leqslant b$ равносильно $a \cap b = a$.

Элемент a полной структуры S называется *компактным*, если во всяком подмножестве $B \subseteq S$, для которого $a \leqslant (\bigcup B)$, найдется такое конечное подмножество $B' \leqslant B$, что $a \leqslant (\bigcup B')$.

В полной структуре подалгебр произвольной алгебры компактными элементами являются конечнопорожденные подалгебры (т. е. подалгебры, обладающие конечной системой образующих) и только они.

В самом деле, пусть в алгебре G сигнатуры Ω взята конечнопорожденная подалгебра

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

и пусть она содержится в объединении подалгебр B_α, $\alpha \in I$,

$$A \subseteq \{B_\alpha, \alpha \in I\}.$$

Выбираем для каждого из элементов $a_1, \ldots, a_n$ одну из его записей в виде Ω-слова от (конечной системы) элементов, принадлежащих к некоторым из подалгебр B_α, $\alpha \in I$ (ср. § 1). В результате выделяется такой конечный набор подалгебр $B_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_s}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in I$, что через элементы этих подалгебр записывается каждый из элементов $a_1, \ldots, a_n$, а поэтому

$$A \subseteq \{B_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_s}\}.$$

С другой стороны, если подалгебра C алгебры G не имеет конечной системы образующих, то она совпадает с объединением подалгебр $\{c\}$, где элемент c пробегает всю подалгебру C, но объединение любого конечного набора этих подалгебр строго меньше C.

Полная структура S называется *компактнопорожденной*, если всякий ее элемент является объединением компактных элементов. Легко видеть, что *полная структура подалгебр всякой алгебры будет компактнопорожденной.* Действительно, всякая подалгебра является объединением подалгебр с одним образующим, порожденных всеми ее элементами.

Существует теорема Биркгофа-Фринка, по которой всякая компактнопорожденная полная структура изоморфна полной структуре всех подалгебр некоторой алгебры (Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 299—316).

Со всякой алгеброй естественным образом связывается еще одна полная структура, много более широкая, чем структура подалгебр. Она будет введена в следующем параграфе, а сейчас укажем одну часто используемую конструкцию.

Пусть дано семейство алгебр G_i, $i \in I$, одной и той же сигнатуры Ω; множество индексов I может быть как конечным, так и бесконечным. Рассмотрим множество G, элементами которого являются всевозможные системы $a = (a_i \mid a_i \in G_i,\ i \in I)$ элементов, взятых по одному в каждой из алгебр G_i. Множество G можно превратить в алгебру сигнатуры Ω, полагая, что операции из Ω выполняются в G покомпонентно: если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и в G взяты элементы

$$a^{(k)} = (a_i^{(k)}), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то

$$a'a'' \ldots a^{(n)}\omega = (a_i'a_i'' \ldots a_i^{(n)}\omega);$$

если же $\omega \in \Omega_0$, то эта операция отмечает в G элемент

$$0^\omega = (0_i^\omega),$$

где 0_i^ω — элемент, отмечаемый операцией ω в алгебре G_i.

Алгебра G называется *декартовым произведением* (или полным прямым произведением, или полной прямой суммой) алгебр G_i, $i \in I$, и записывается в виде

$$G = \prod_{i \in I} G_i$$

или, если множество I конечно и состоит из натуральных чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, — в виде

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n.$$

Из определения операций в G немедленно следует, что если все алгебры G_i, $i \in I$, принадлежат одному и тому же многообразию (Ω, Λ), то и их декартово произведение содержится в этом многообразии.

Сейчас мы ограничимся рассмотрением декартовых произведений пар алгебр. Если даны алгебры G и H сигнатуры Ω, то в их декартовом произведении $G \times H$ возьмем произвольную подалгебру; нам удобно обозначать ее буквой ρ. Эта подалгебра состоит из некоторых пар вида (a, b), $a \in G$, $b \in H$, причем если $(a, b) \in \rho$, то будем писать также $a\rho b$. На ρ можно смотреть как на бинарное отношение между множествами G и H, причем из определения подалгебры и определения операций в декартовом произведении следует, что подалгебра в $G \times H$ — это те и только те бинарные отношения ρ между G и H, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и $a_i \rho b_i$, $a_i \in G$, $b_i \in H$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$(a_1 \ldots a_n\omega)\, \rho\, (b_1 \ldots b_n\omega);$$

2) если $\omega \in \Omega_0$ и отмечает в G и H соответственно элементы 0_ω^G и 0_ω^H, то $0_\omega^G \, \rho \, 0_\omega^H$.

Подалгебры алгебры $G \times H$, т. е. бинарные отношения между G и H, обладающие свойствами 1) и 2), называются *соответствиями* между G и H. Для записи того, что ρ есть соответствие между G и H, мы будем использовать символ $G\rho H$.

Примерами соответствий служат всевозможные гомоморфизмы G в H или даже частичные гомоморфизмы, т. е. гомоморфизмы подалгебр алгебры G в алгебру H; если $G' \subseteq G$ и φ: $G' \to H$ — гомоморфизм, то, полагая $a'\varphi = b'$ для $a' \in G'$ и используя символ φ для записи соответствующего бинарного отношения, т. е. $a'\varphi b'$, мы получим, что условия 1) и 2) для φ вместо ρ следуют из определения гомоморфизма.

На произвольные же соответствия между G и H можно смотреть как на «многозначные частичные гомоморфизмы» G в H.

Соответствия между алгебрами G и H, являясь всевозможными подалгебрами алгебры $G \times H$, составляют полную структуру. Именно в смысле этой *полной структуры соответствий* между G и H будет пониматься дальше частичная упорядоченность соответствий.

Таким образом, $\rho \leqslant \sigma$ для соответствий $G\rho H$, $G\sigma H$ означает, что для любых $a \in G$, $b \in H$ из $a\rho b$ следует $a\sigma b$.

С другой стороны, пусть даны однотипные алгебры G, H и K сигнатуры Ω и соответствия $G\rho H$ и $H\sigma K$. Определим следующим образом бинарное отношение $\rho\sigma$ между G и K: $a(\rho\sigma)c$, $a \in G$, $c \in K$, тогда и только тогда, когда существует хотя бы один такой элемент $b \in H$, что $a\rho b$ и $b\sigma c$ или, короче, $a\rho b\sigma c$.

Это произведение $\rho\sigma$ *соответствий* $G\rho H$ *и* $H\sigma K$ *само является соответствием между* G *и* K. В самом деле, если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и $a_i(\rho\sigma)c_i$, $a_i \in G$, $c_i \in K$ $i = 1, \ldots, n$, то существуют такие $b_i \in H$, что $a_i\rho b_i\sigma c_i$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому по 1) из определения соответствия

$$(a_1 \ldots a_n\omega)\, \rho\, (b_1 \ldots b_n\omega)\, \sigma\, (c_1 \ldots c_n\omega),$$

откуда, по определению произведения соответствий,

$$(a_1 \ldots a_n\omega)\, (\rho\sigma)\, (c_1 \ldots c_n\omega).$$

С другой стороны, для $\omega \in \Omega_0$ будет, ввиду 2), $0_\omega^G \rho 0_\omega^H \sigma 0_\omega^K$, откуда $0_\omega^G\, (\rho\sigma)\, 0_\omega^K$.

Следует помнить, конечно, что произведение соответствий определено не всегда; именно, оно не определено для соответствий $G\rho H$ и $H'\sigma K$, если $H \neq H'$.

Умножение соответствий ассоциативно. Действительно, если даны соответствия $G\rho H$, $H\sigma K$, $K\tau L$, то для $a \in G$, $d \in L$ утверждение $a[(\rho\sigma)\tau]d$ равносильно существованию такого $c \in K$, что $a(\rho\sigma)c\tau d$, что равносильно существованию такого $b \in H$, что $a\rho b\sigma c\tau d$. Последнее же равносильно утверждению $a\rho b(\sigma\tau)d$, т. е. утверждению $a[\rho(\sigma\tau)]d$, что и требовалось доказать.

Отметим, что произведение соответствий в применении к гомоморфизмам превращается, очевидно, в произведение гомоморфизмов в смысле результата их последовательного выполнения (см. § 3).

Умножение соответствий связано с их частичной упорядоченностью следующим образом: *если даны соответствия $G\rho H$, $G\rho' H$, причем $\rho \leqslant \rho'$, то для любых соответствий $H\sigma K$, $L\tau G$ будет*

$$\rho\sigma \leqslant \rho'\sigma, \quad \tau\rho \leqslant \tau\rho'. \tag{1}$$

Докажем хотя бы первое утверждение.

Если $a(\rho\sigma)c$, $a \in G$, $c \in K$, то существует такое $b \in H$, что $a\rho b\sigma c$, т. е., ввиду $\rho \leqslant \rho'$, $a\rho' b\sigma c$, откуда следует $a(\rho'\sigma)c$.

Для всякого соответствия $G\rho H$ существует *инверсное соответствие* $H\rho^{-1}G$; именно, $b\rho^{-1}a$, где $a \in G$, $b \in H$, тогда и только тогда, когда $a\rho b$. Из определения соответствия (условия 1) и 2)) немедленно следует, что ρ^{-1} действительно будет соответствием и что выполняются следующие свойства:

$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho; \tag{2}$$

если произведение $\rho\sigma$ существует, то

$$(\rho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\rho^{-1}; \tag{3}$$

наконец,

$$(\bigcap_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} \rho_i^{-1}, \tag{4}$$

а поэтому из $\rho \leqslant \sigma$ следует $\rho^{-1} \leqslant \sigma^{-1}$.

Используя умножение соответствий, их частичную упорядоченность и инверсное соответствие, а также учитывая, что тождественный автоморфизм ε_G алгебры G является соответствием G с самим собою, можно описать некоторые специальные виды соответствий. Отметим сперва, что если дано декартово произведение

$$G = \prod_{i \in I} G_i,$$

то, сопоставляя каждому элементу $(a_i,\ i \in I) \in G$ элемент $a_i \in G_i$, мы получаем эпиморфизм $\pi_i\colon G \to G_i$; образ всякой подалгебры $A \subseteq G$ при π_i будет подалгеброй в G_i, называемой проекцией A в G_i.

В согласии с этим для любого соответствия $G\rho H$ проекция подалгебры $\rho \subseteq G \times H$ в G называется *первой проекцией соответствия* ρ; аналогично определяется *вторая проекция*.

Без труда проверяются следующие утверждения:

Первая (вторая) проекция соответствия $G\rho H$ тогда и только тогда совпадает с G (H), когда $\rho\rho^{-1} \geqslant \varepsilon_G$ (когда $\rho^{-1}\rho \geqslant \varepsilon_H$).

Соответствие $G\rho H$ тогда и только тогда будет частичным гомоморфизмом, если $\rho^{-1}\rho \leqslant \varepsilon_H$; гомоморфизмом,— если $\rho\rho^{-1} \geqslant \varepsilon_G$ и $\rho^{-1}\rho \leqslant \varepsilon_H$; мономорфизмом,— если $\rho\rho^{-1} = \varepsilon_G$ и $\rho\rho^{-1} \leqslant \varepsilon_H$; эпиморфизмом,— если $\rho\rho^{-1} \geqslant \varepsilon_G$ и $\rho^{-1}\rho = \varepsilon_H$; изоморфизмом,— если $\rho\rho^{-1} = \varepsilon_G$ и $\rho^{-1}\rho = \varepsilon_H$.