§ 7. МУФАНГОВЫ ЛУПЫ

Многообразие луп настолько шире многообразия групп, что было бы неправильным смотреть на лупы как, так сказать, на «неассоциативные группы». В самом деле, хотя лупа обладает единицей 1 и, будучи квазигруппой, для всякого элемента a содержит элементы

$$a^{-1} = 1 \setminus a \text{ и } {}^{-1}a = 1 / a,$$

однако эти «обратные элементы» вовсе не играют в лупе роль обратных элементов группы. Введем поэтому следующий более узкий класс луп.

Лупа G называется *лупой с обратимостью*, если для любых $a, b \in G$

$$(ba)a^{-1} = b, \quad {}^{-1}a(ab) = b. \tag{1}$$

Подставляя во второе из равенств (1) вместо b элемент a^{-1}, получаем ${}^{-1}a = a^{-1}$, т. е. *всякий элемент лупы с обратимостью обладает однозначно определенным двусторонним обратным элементом* a^{-1}:

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Равенства (1) принимают теперь вид

$$(ba)a^{-1} = a^{-1}(ab) = b. \tag{2}$$

Ясно, что $(a^{-1})^{-1} = a$, откуда

$$b \setminus a = a^{-1}b, \quad b / a = ba^{-1}. \tag{3}$$

Действительно, ввиду (2) будет, например,

$$a(a^{-1}b) = (a^{-1})^{-1}(a^{-1}b) = b.$$

На основании (3) покажем, что

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}. \tag{4}$$

В самом деле, если $ab = c$, то $b = a^{-1}c$, откуда $a^{-1} = bc^{-1}$ и, наконец, $c^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Укажем еще некоторые свойства луп с обратимостью, необходимые для дальнейшего. Пусть G — такая лупа и пусть задан ее главный изотоп с операцией

$$a \circ b = a\rho \cdot b\sigma, \tag{5}$$

также являющийся лупой; пусть 1_0 — единица последней. Тогда, подставляя в (5) вместо b элемент 1_0, получаем

$$a = a\rho \cdot 1_0\sigma,$$

откуда, ввиду (2),

$$a\rho = a\cdot(1_0\sigma)^{-1}.$$

Аналогично,

$$b\sigma = (1_0\rho)^{-1}\cdot b.$$

Положим

$$(1_0\sigma)^{-1} = u, \quad (1_0\rho)^{-1} = v.$$

Заметим, что в любой квазигруппе G умножение с п р а в а всех ее элементов на некоторый элемент u определяет подстановку множества G, которую мы обозначим через r_u. Аналогично через l_v обозначим подстановку, получающуюся от умножения с л е в а всех элементов квазигруппы на элемент v. Возвращаясь к лупе с обратимостью G, мы получаем, что операция (5) любого ее главного изотопа, являющегося лупой, может быть записана в виде

$$a\circ b = ar_u\cdot bl_v \tag{6}$$

(символ подстановки, как обычно, мы записываем справа).

Отметим, с другой стороны, что для лупы с обратимостью G ее главный изотоп с операцией (6) при любых u, $v \in G$ будет лупой. В самом деле, единицей будет служить элемент $v^{-1}u^{-1}$, так как для всех $a \in G$

$$v^{-1}u^{-1} \circ a = (v^{-1}u^{-1})r_u\cdot ab_v = [(v^{-1}u^{-1})u]\cdot(va) = \\ = v^{-1}\ (va) = a,$$

и аналогично с другой стороны.

Вернемся на минуту к рассмотрению изотопий группоидов (см. § 6). В том частном случае, когда обе изотопные операции совпадают, $a\circ b = ab$, т. е.

$$ab = (a\rho\cdot b\sigma)\tau, \tag{7}$$

говорят об *автотопии* рассматриваемого группоида. Обозначим через λ подстановку, обратную τ, т. е.

$\lambda = \tau^{-1}$. Тогда автотопию (7) можно переписать в виде

$$a\rho \cdot b\sigma = (ab)\lambda.$$

Запишем ее символом (ρ, δ, λ). В частности, если φ — автоморфизм группоида, то $(\varphi, \varphi, \varphi)$ будет автотопией, и обратно.

Если (ρ, σ, λ) и $(\rho', \sigma', \lambda')$ — две автотопии группоида G, то их произведение

$$(\rho, \sigma, \lambda)(\rho', \sigma', \lambda') = (\rho\rho', \sigma\sigma', \lambda\lambda')$$

также будет автотопией, так как для любых $a, b \in G$

$$a\rho\rho' \cdot b\sigma\sigma' = (a\rho \cdot b\sigma)\lambda' = (ab)\lambda\lambda'.$$

Это умножение автотопий ассоциативно, так как сводится к умножению подстановок, единицей служит тождественная автотопия $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$, где ε — тождественная подстановка, а обратной для автотопии (ρ, σ, λ) будет автотопия $(\rho^{-1}, \sigma^{-1}, \lambda^{-1})$. Действительно, это будет автотопия, так как

$$(ab)\lambda^{-1} = [(a\rho^{-1})\rho \cdot (b\sigma^{-1})\sigma]\lambda^{-1} = (a\rho^{-1} \cdot b\sigma^{-1})\lambda\lambda^{-1} = \\ = a\rho^{-1} \cdot b\sigma^{-1}.$$

Полученная группа автотопий группоида содержит в качестве подгруппы его группу автоморфизмов.

Вновь возвращаясь к лупам с обратимостью, отметим, что в них отображение $a \to a^{-1}$ будет подстановкой; обозначим ее через ι:

$$a\iota = a^{-1}.$$

Лемма. *Если (ρ, σ, λ) — автотопия лупы с обратимостью G, то $(\lambda, \iota\sigma\iota, \rho)$ и $(\iota\rho\iota, \lambda, \sigma)$ также будут ее автотопиями. Обратно, существование любой из этих новых автотопий влечет существование исходной автотопии.*

Действительно, для любых $a, b \in G$ выполняется равенство $a\rho \cdot b\sigma = (ab)\lambda$. Подставляя сюда ab вместо a и b^{-1} вместо b, получаем

$$(ab)\rho \cdot b\iota\sigma = a\lambda,$$

откуда

$$(ab)\rho = a\lambda \cdot (b\iota\sigma)^{-1} = a\lambda \cdot b\iota\sigma\iota,$$

т. е. $(\lambda, \iota\sigma\iota, \rho)$, действительно, — автотопия. Аналогично, подставляя в то же равенство ab вместо b и a^{-1} вместо a, получаем

$$a\iota\rho \cdot (ab)\sigma = b\lambda,$$

откуда

$$(ab)\sigma = (a\iota\rho)^{-1} \cdot b\lambda = a\iota\rho\iota \cdot b\lambda,$$

т. е. и $(\iota\rho\iota, \lambda, \sigma)$ будет автотопией. Последнее утверждение леммы следует из того, что применение уже доказанного к автотопии $(\lambda, \iota\sigma\iota, \rho)$, например, снова дает автотопию (ρ, σ, λ), так как $\iota^2 = \varepsilon$.

На самом деле основным объектом изучения являются не лупы с обратимостью, а более узкий класс муфанговых луп. Именно, лупа называется *муфанговой*, если все лупы, ей изотопные, являются лупами с обратимостью. Муфанговы лупы также составляют многообразие ввиду следующей теоремы Муфанг (Math. Ann., **110** (1935), 416—430):

Лупа G тогда и только тогда муфангова, когда в ней выполняется тождество

$$(xy)(zx) = [x(yz)]x. \tag{8}$$

Доказательство. Положим сперва, что G — лупа со свойством обратимости. Мы знаем, что всякий ее изотоп изоморфен главному изотопу и что во всех лупах, являющихся главными изотопами лупы G, операции задаются по правилу (6) при некоторых u и v, которые могут быть произвольными элементами из G. Пусть G_0 — один из этих главных изотопов, а операция в нем есть

$$a \circ b = ar_u \cdot bl_v.$$

Выполнимость в G_0 первого из тождеств (1) равносильна существованию такой подстановки ι_0, что для любых $a, b \in G$

$$(a \circ b) \circ b\iota_0 = a,$$

что равносильно равенству

$$(a\circ b)r_u \cdot b\iota_0 l_v = a,$$

равносильному, в свою очередь, равенству

$$(a\circ b)r_u = a\cdot b\iota_0 l_v\iota. \tag{9}$$

Заметим, что в нашей лупе G обратной для подстановки r_u служит подстановка $r_{u^{-1}}$, т. е. $r_u^{-1} = r_{u^{-1}}$, так как $(au)u^{-1} = a$; аналогично $l_v^{-1} = l_{v^{-1}}$. Так как элемент ar_u^{-1} пробегает вместе с элементом a все множество G и это же верно для элементов bl_v^{-1} и b, то равенство (9) равносильно равенству

$$(ar_u^{-1} \circ bl_v^{-1})r_u = ar_u^{-1}\cdot bl_v^{-1}\iota_0 l_v\iota,$$

т. е., полагая $l_v^{-1}\iota_0 l_v\iota = \tau$, — равенству

$$(ab)r_u = ar_u^{-1}\cdot b\tau;$$

иными словами, оно равносильно существованию в лупе G автотопии (r_u^{-1}, τ, r_u). Последнее, по лемме, равносильно существованию автотопии $(\iota r_u^{-1}\iota, r_u, \tau)$, равной (l_u, r_u, τ), так как ввиду замечания выше и (4), для всех $a \in G$

$$a\iota r_u^{-1}\iota = (a^{-1}u^{-1})^{-1} = ua = al_u.$$

На самом деле, однако, $\tau = l_u r_u$, так как для любого $a \in G$

$$a\tau = (a\cdot 1)\tau = al_u . 1r_u = (al_u)\, u = al_u r_u.$$

Наконец, существование автотопии $(l_u, r_u, l_u r_u)$ по определению означает, что для любых $a, b \in G$

$$al_u\cdot br_u = (ab)l_u r_u,$$

т. е.

$$(ua)(bu) = [u(ab)]u.$$

Это означает, так как элемент u мог быть произвольным элементом из G, что выполнение во всех лупах, изотопных лупе G, первого из тождеств (1), составляющих определение лупы с обратимостью, влечет выполнение в G тождества (8). Таким же путем доказывается, что и выполнение второго из тождеств (1) во всех лупах, изотопных лупе G, влечет выполнение в G того же тождества (8); при проведении доказательства нужно лишь в должном месте заменить элементы a и b соответственно на al_v^{-1} и br_u^{-1}, а при применении леммы использовать ее другое утверждение.

Остается доказать, что всякая лупа G с тождеством (8) будет лупой с обратимостью. Из (8) при $y = 1$ для всех $x, z \in G$ следует $x(zx) = (xz)x$. Поэтому, подставляя в (8) вместо x, y, z элементы a^{-1}, b, a (где a, b — произвольные элементы из G и $aa^{-1} = 1$), получаем

$$a^{-1}b = [a^{-1}(ba)]a^{-1} = a^{-1}[(ba)a^{-1}],$$

откуда $b = (ba)a^{-1}$, т. е. в G выполняется первое из тождеств (1). С другой стороны, подставляя в (8) вместо x, y, z элементы ${}^{-1}a$, a, b (где ${}^{-1}a \cdot a = 1$), получаем

$$b({}^{-1}a) = [{}^{-1}a \cdot (ab)]({}^{-1}a),$$

откуда $b = {}^{-1}a\,(ab)$, т. е. в G выполняется и второе из тождеств (1). Теорема доказана.

Заметим, что тождество (8) можно было бы заменить в этой теореме некоторыми другими тождествами, равносильными ему в классе луп, например, тождеством

$$[(xy)z]y = x[y(zy)].$$

Отметим, что в силу другой теоремы Муфанг муфангову лупу можно определить как такую лупу, что во всякой лупе, ей изотопной, подлупа, порожденная любыми двумя элементами, ассоциативна, т. е. является группой.